GOSPODARKA NARODOWA

9
(15)
Rok XIV
wrzesień
2003

Tomasz TOKARSKI*

Reguły polityki monetarnej w warunkach długookresowej równowagi typu Domara-Solowa

Wprowadzenie[1]

Celem prezentowanego opracowania jest próba teoretycznej analizy długookresowych reguł polityki monetarnej na gruncie modeli wzrostu typu [Domara, 1962, s. 124-141] i [Solowa, 1956]. Rozważany w pracy model wzrostu jest modelem wzrostu gospodarczego typu Domara-Solowa z dwóch następujących względów. Po pierwsze, podobnie jak w modelu wzrostu Domara, analizuje się w nim wpływ realizowanych w gospodarce inwestycji tak na popytową, jak i podażową stronę gospodarki (w modelu Solowa nie ma rozważań dotyczących popytowych efektów inwestycji). Po drugie, model ten jest modelem wzrostu gospodarczego typu Domara-Solowa gdyż, analogicznie jak ma to miejsce w modelu Solowa, proces produkcyjny opisany jest przez neoklasyczną funkcję produkcji typu Cobba-Douglasa charakteryzującą się malejący-

* Autor jest pracownikiem Zakładu Ekonomii Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Artykuł wpłynął do redakcji w marcu 2003 r.

[1] Niniejsze opracowanie powstało w ramach projektu KBN nr 5H02B03321 kierowanego przez prof. dr. hab. Władysława Welfe. Wstępna wersja opracowania prezentowana była na konferencji *Macromodels'2002* w Cedzynie w grudniu 2002 roku. Autor dziękuje prof. dr hab. Barbarze Liberdzie z Uniwersytetu Warszawskiego i prof. dr. hab. Władysławowi Welfe z Uniwersytetu Łódzkiego za uwagi do wstępnych wersji opracowania. Wyrazy podziękowania należą się również mgr Iwonie Świeczewskiej z Uniwersytetu Łódzkiego oraz mgr. Piotrowi Mateji z Politechniki Łódzkiej za uwagi do matematycznej strony pracy.

mi produkcyjnościami krańcowymi kapitału i pracy, stałymi efektami skali i (wynikającym stąd) elastycznym współczynnikiem kapitałochłonności[2].

Ponadto w prezentowanych w pracy rozważaniach zakłada się, że wielkość realizowanych w gospodarce inwestycji jest malejącą funkcją realnej stopy procentowej. Założenie to implikuje, iż wzrost (spadek) owej zmiennej makroekonomicznej drogą spadku (wzrostu) inwestycji oddziałuje zarówno na popytową, jak i podażową stronę gospodarki. Jeśli założenie to jest prawdziwe, to realizowana przez bank centralny polityka monetarna polegająca na regulacji stóp procentowych, istotnie wpływa zarówno na długookresową ścieżkę czasową zagregowanego popytu, jak i zagregowanej podaży (produktu potencjalnego). Co prawda można w tym miejscu przedstawić argument, że bank centralny faktycznie reguluje jedynie nominalną stopę procentową. Warto jednak zauważyć, że polityka regulacji nominalnych stóp procentowych w dużej mierze tożsama jest z polityką regulacji realnych stóp procentowych. Wynika to (zdaniem autora) z dwóch następujących przyczyn. Po pierwsze, w krótkim okresie ceny są relatywnie sztywne (lepkie) od dołu, co implikuje, że oddziaływanie na nominalne stopy procentowe jest równoznaczne z oddziaływaniem na stopy realne (por. np. [Lippi, 2002] lub [Wojtyna, 2000], rozdział IV, gdzie przedstawiony jest szereg teoretycznych argumentów za sztywnościami nominalnymi na gruncie nowej ekonomii Keynesistowskiej). Po drugie, w długim okresie racjonalnie działające banki centralne nie powinny popełniać systematycznych błędów w ocenie inflacji (zerowa wartość oczekiwana i stała wariancja błędów w ocenie inflacji). To zaś oznacza, iż konsekwentna polityka kreacji nominalnych stóp procentowych przez bank centralny powinna mieć istotne skutki również po stronie realnych stóp procentowych (por. też rozważania w punkcie 2 opracowania). Stąd zaś płynie wniosek, że zarówno w krótkim, jak i długim okresie bank centralny może oddziaływać nie tylko na realną stopę procentową, ale również (poprzez inwestycje) na popytową i podażową stronę rynku produktu.

Warto również zwrócić uwagę na fakt, że rozważane w opracowaniu reguły polityki monetarnej mają charakter reguł *stricte* długookresowych. *Implicite* oznacza to tyle, że pokazują jedynie ogólne tendencje w kształtowaniu realnych stóp procentowych na takim poziomie, by gospodarka rozwijała się przy pełnym wykorzystaniu czynników produkcji. Analizowany w pracy model nie uwzględnia bowiem wpływu krótkookresowych szoków popytowej czy podażowej strony gospodarki na równowagę rynku produktu (szczególnie) w krótkim okresie. Nie wyznacza zatem reguł polityki monetarnej, które powinny być zastosowane w odpowiedzi na szoki krótkookresowe. Reguły takie

[2] W modelu wzrostu Domara *implicite* występuje stały współczynnik kapitałochłonności, co prowadzi do dobrze znanego w teorii makroekonomii problemu wzrostu na „ostrzu noża" jedynej ścieżki wzrostu gwarantującej równowagę makroekonomiczną przy pełnym wykorzystaniu mocy wytwórczych. Przyjęcie założenia o elastycznej kapitałochłonności (jak ma to miejsce w neoklasycznych modelach wzrostu typu [Solowa, 1956] czy [Mankiwa, Romera, Weila, 1992]) pozwala na uzyskanie długookresowej ścieżki wzrostu nie leżącej na ww. „ostrzu noża" (por. też np. [Tokarski, 2001a lub 2001b], rozdział 1).

znane są jednak w literaturze makroekonomicznej. Mogą nimi być np. reguły monetarne [Taylora, 1993] (por. też [Rotemberg, Woodford, 1999]) lub reguły zaproponowane w pracy [Lippiego, 2002].

Model

Niech dany będzie długookresowy model gospodarki spełniający następujące założenia:

1. Proces produkcyjny (podobnie jak w modelu wzrostu Solowa, 1956) opisany jest przez neoklasyczną funkcję produkcji typu Cobba-Douglasa postaci[3]:

$$Y^s = K^{\alpha} (e^{gt}L)^{1-\alpha}; \; g > 0; \; \alpha \in (0;1) \qquad (1)$$

gdzie:

$Y^S > 0$ – produkt potencjalny (produkt od podażowej strony gospodarki);

$K, L > 0$ – nakłady kapitału (rzeczowego) i pracy;

g – stopa postępu technicznego potęgującego produkcyjność pracy (czyli stopa postępu technicznego w sensie Harroda);

α i $1 - \alpha$ to elastyczności Y^S względem K i L lub (na gruncie marginalnej teorii podziału Clarka) udziały kapitału i pracy w produkcie.

2. Zagregowany popyt w gospodarce zależny jest od realnej stopy procentowej r, wielkości produktu potencjalnego Y^S oraz Keynesowskiego mnożnika wydatków autonomicznych $m > 1$. Wpływ realnej stopy procentowej na zagregowany popyt wynika z jej wpływu na popyt konsumpcyjny, inwestycyjny oraz (przez parytet stóp procentowych i mechanizm kształtowania kursu walutowego) na eksport netto. Przyjmuje się też, że elastyczność zagregowanego popytu względem realnej stopy procentowej wynosi $-\beta \in (-1;0)$. Długookresowy wpływ produktu potencjalnego na zagregowany popyt wynika stąd, że wzrost produkcji powoduje w długim okresie wzrost popytu przez wzrost płac i zysków. Zakłada się więc, że zagregowany popyt rośnie wraz ze wzrostem dochodu potencjalnego i jego elastyczność względem owego dochodu wynosi $\gamma \in (0;1)$. Fakt, iż $\gamma < 1$ można uzasadnić w ten sposób, że jeśli zagregowany popyt uzależniony jest od wydatków autonomicznych według równania: $Y^d = A_0 + cY$ [$A_0 > 0$ i $c \in (0;1)$], to $\frac{\dot{Y}^d}{Y^d} = \frac{c\dot{Y}}{A_0 + cY} < \frac{\dot{Y}}{Y}$. Wynika stąd, że funkcję zagregowanego popytu w analizowanym modelu gospodarki można zapisać następująco:

---

[3] W stosunku do wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych *implicite* zakłada się, że są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \in [0;+\infty)$. Zapis postaci $\dot{y}(t) \equiv \frac{dy}{dt}$ lub $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$ oznaczał będzie pochodną zmiennej y po czasie t, czyli ekonomicznie rzecz biorąc, przyrost wartości owej zmiennej w momencie t.

$$Y^d = m\,(Y^s)^\gamma\, r^{-\beta};\ m > 1;\ \beta,\gamma \in (0;1) \qquad (2)$$

3. Przyrost kapitału $\dot{K}$ jest różnicą pomiędzy inwestycjami I i deprecjacją kapitału δK, gdzie $\delta \in (0;1)$ jest stopą deprecjacji kapitału. O funkcji inwestycji zakłada się, że dana jest wzorem $I(r) = I_0\, r^{-\beta}$, co oznacza, że $-\beta$ jest również elastycznością inwestycji względem realnej stopy procentowej (oznacza to, że *implicite* przyjmuje się, iż wrażliwość inwestycji na zmiany stopy procentowej jest zbliżona do wrażliwości pozostałych komponentów zagregowanego popytu na zmiany ww. zmiennej makroekonomicznej). Równanie przyrostu kapitału dane jest zatem wzorem:

$$\dot{K} = I_0 r^{-\beta} - \delta K;\ I_0 > 0;\ \delta \in (0;1) \qquad (3)$$

4. Bank centralny, prowadząc politykę realnych stóp procentowych, kieruje się trzema następującymi zasadami. Po pierwsze, nie dopuszcza do tego, by zagregowany popyt przekroczył produkcję potencjalną, gdyż wówczas nadwyżkowy popyt wywoływałby presję inflacyjną. Po drugie, dostosowuje wielkość popytu do produktu potencjalnego, by nie powstawały niewykorzystane moce wytwórcze w gospodarce po stronie zasobu kapitału. Po trzecie, zakładając, że w momencie $t = 0$ stopa bezrobocia jest stopą bezrobocia równowagi $[u(0) = u^*]$ bank centralny dąży do tego, by stopa bezrobocia w każdym momencie $t \in [0; +\infty)$ równa była stopie bezrobocia w momencie $t = 0$[4]. Z pierwszych dwóch zasad wynika, że:

$$Y^d = Y^s \text{ dla } t \in [0; +\infty) \qquad (4)$$

zaś z trzeciej z ww. zasad wyprowadzić można równanie długookresowej stopy wzrostu zatrudnienia postaci:

$$\dot{L}/L = n;\ n > 0 \qquad (5)$$

gdzie n jest stopą wzrostu zatrudnienia równą stopie wzrostu podaży pracy, która w długim okresie wynika z oddziaływania głównie czynników demograficznych[5]. Z powyższych założeń dotyczących reguł długookresowej

---

[4] Rzecz jasna, jeśli wyjściowa stopa bezrobocia będzie powyżej (poniżej) bezrobocia równowagi, to w krótkim i średnim okresie muszą wystąpić pewne mechanizmy dostosowawcze na rynku pracy, które zrównają u z u^*. Mechanizmy te wydają się jednak być przedmiotem analiz krótko- i średniookresowych, które niekoniecznie muszą być zagadnieniem rozważań długookresowych.

[5] Długookresową stopę wzrostu zatrudnienia (przy stałej stopie bezrobocia) równą stopie wzrostu podaży pracy $\dot{N}/N = n > 0$ można wyprowadzić bezpośrednio z tożsamości stopy bezrobocia $u \equiv 1 - \frac{L}{N}$ i założenia, że dla dowolnego $t \in [0; +\infty)$ ma zachodzić: $\dot{u} = 0$. Licząc przyrost stopy bezrobocia (w czasie) w przyrównując go do zera okazuje się, że $\dot{u} = \frac{L\dot{N} - \dot{L}N}{N^2} = 0$ a stąd: $\dot{L}/L = \dot{N}/N = n$ dla dowolnego $t \in [0; +\infty)$.

polityki monetarnej wynika, iż bank centralny powinien kształtować realne stopy procentowe na takim poziomie, by spełnione były równania (4-5) przy czym oddziaływanie realnych stóp procentowych na równowagę gospodarki odbywają się kanałami opisanymi przez równania (1-3).

Dążenie do uzyskania dwóch ww. celów drogą zmian realnych (a nie nominalnych) stóp procentowych można również próbować uzasadnić następująco. Relację między realną (r) a nominalną (R) stopą procentową opisuje tożsamość: $r \equiv R - \pi$, gdzie π jest stopą inflacji. Niech ponadto stopa inflacji w długim okresie dana będzie wzorem:

$$\pi = \mu - \frac{\dot{Y}}{Y} + \kappa \frac{Y^d - Y^s}{Y^s}; \kappa > 0 \tag{6}$$

gdzie μ jest stopą wzrostu nominalnej podaży pieniądza, zaś κ współczynnikiem opisującym wpływ wielkości luki popytowej $\frac{Y^d - Y^s}{Y^s}$ na stopę inflacji π. Z relacji (6) wynika, że zakłada się, iż stopa inflacji wynika z czynników *stricte* monetarnych $\left(\mu - \frac{\dot{Y}}{Y}\right)$ oraz z presji inflacyjne wynikające z luki popytowej $\left(\frac{Y^d - Y^s}{Y^s}\right)$. Jeśli jednak bankowi centralnemu uda się zlikwidować absolutną wielkość luki popytowej $\left(\frac{Y^d - Y^s}{Y^s} = 0\right)$, to inflacja będzie miała jedynie charakter monetarny. Wówczas równanie (6) sprowadzi się do równania:

$$\pi = \mu - \frac{\dot{Y}}{Y}$$

a stąd realna stopa procentowa dana będzie wzorem:

$$r \equiv R - \pi = R - \mu + \frac{\dot{Y}}{Y} \tag{7}$$

Gdyby teraz założyć, że stosując politykę wzrostu nominalnej podaży pieniądza (a nie stóp procentowych) bank centralny chce osiągnąć w długim okresie cel inflacyjny π^T, to musi regulować stopę wzrostu nominalnej podaży pieniądza na poziomie $\mu = \pi^T + \frac{\dot{Y}}{Y}$ to zaś sprowadzi równanie (7) do równania:

$$r \equiv R - \pi^T$$

Wówczas zmiany nominalnych stóp procentowych (przy celu inflacyjnym π^T) tożsame będą ze zmianami realnych stóp procentowych.

Z zależności (2) i (4) wynika, że:

$$m\,(Y^s)^\gamma\, r^{-\beta} = Y^s$$

a stąd uzyskuje się równanie realnej stopy procentowej dla dowolnego momentu $t \in [0; +\infty)$ postaci:

$$\ln(r) = \frac{1}{\beta}\left[\ln(m) - (1-\gamma)\ln(Y^s)\right] \tag{8}$$

Równanie (8) wyznacza ścieżkę czasową realnych stóp procentowych, które równoważyły będą omawianą tu gospodarkę. Z równania tego wynika m.in., iż ww. stopy procentowe (w każdym momencie t) powinny być tym wyższe, im wyższy jest mnożnik (m) lub elastyczność (γ) zagregowanego popytu względem produktu potencjalnego. Co więcej, owe stopy procentowe powinny być również tym wyższe, im niższy jest produkt potencjalny.

Z zależności (1), (2) i (4) uzyskuje się równanie:

$$m\left[K^\alpha (e^{gt}L)^{1-\alpha}\right]^\gamma r^{-\beta} = K^\alpha (e^{gt}L)^{1-\alpha}$$

które implikuje:

$$r^{-\beta} = \frac{\left[K^\alpha (e^{gt}L)^{1-\alpha}\right]^{1-\gamma}}{m}$$

a stąd i równania (5) wynika, że:

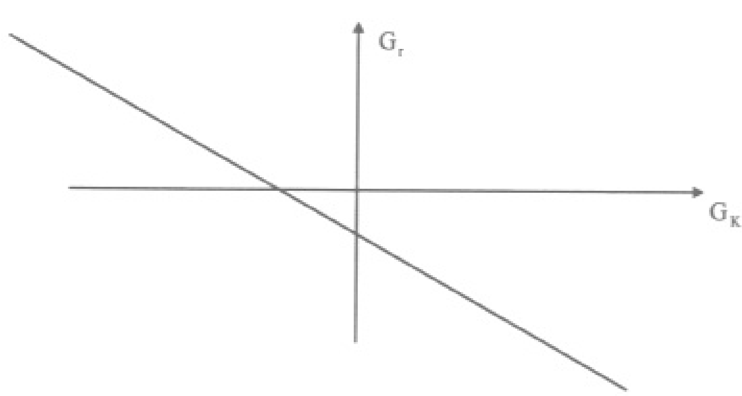
$$-\beta\frac{\dot{r}}{r} = (1-\gamma)\left[\alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)(g+n)\right]$$

Po podstawieniach $G_r \equiv \dot{r}/r$ i $G_K \equiv \dot{K}/K$ (gdzie G_r i G_K to stopy wzrostu realnej stopy procentowej i zasobu kapitału) powyższe równanie można zapisać następująco:

$$G_r = -\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)(g+n)}{\beta} - \frac{(1-\gamma)\alpha}{\beta}G_K \tag{9}$$

Równanie (9) opisuje relacje między tempem akumulacji kapitału G_K a stopą wzrostu realnych stóp procentowych G_r, która gwarantuje pełne wykorzystanie mocy wytwórczych w gospodarce. Z równania tego wynikają następujące wnioski. Po pierwsze, bank centralny powinien się zdecydować na politykę długookresowego podnoszenia realnych stóp procentowych dopiero wówczas, gdy tempo akumulacji kapitału spadnie poniżej poziomu $-\frac{(1-\alpha)(g+n)}{\alpha}$ [czyli gdy stopa spadku kapitału rzeczowego będzie wyższa od $\frac{(1-\alpha)(g+n)}{\alpha}$]. Po drugie, zerowemu tempu akumulacji kapitału odpowiadać powinna stopa spadku realnych stóp procentowych wynosząca $\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)(g+n)}{\beta}$. Po trzecie, ponieważ $\frac{dG_r}{dG_K}=-\frac{(1-\gamma)\alpha}{\beta}$, zatem na długookresowe przyspieszenie tempa akumulacji kapitału bank centralny powinien odpowiadać obniżeniem realnych stóp procentowych (por. też rysunek 1, na którym przedstawione są relacje pomiędzy tempem akumulacji kapitału a stopą wzrostu stopy procentowej równoważącej rynek produktu). Wnioski te wynikają stąd, że jeśli w gospodarce szybko rośnie zasób kapitału, to szybko rośnie również produkt potencjalny. Zatem, by gospodarka nie była hamowana od strony popytowej, rosnąć musi również zagregowany popyt, a to (przy założeniu elastyczności zagregowanego popytu względem produkcji potencjalnej mniejszej od 1) odbywać się może głównie drogą redukcji realnych stóp procentowych.

Rysunek 1. Tempo akumulacji kapitału (G_K) a wzrost stopy procentowej (G_r)



Przekształcając równanie (3) otrzymuje się:

$$G_K+\delta=\frac{I_0 r^{-\beta}}{K}$$

gdzie $G_K > -\delta$. Logarytmując stronami i różniczkując po czasie t powyższą zależność dochodzi się do relacji:

$$\frac{\dot{G}_K}{G_K+\delta} = -\beta G_r - G_K$$

a stąd i z równania (9) wynika, że:

$$\frac{\dot{G}_K}{G_K+\delta} = \alpha(1-\gamma)G_K + (1-\alpha)(1-\gamma)(g+n) - G_K$$

co implikuje równanie:

$$\dot{G}_K = -([1-\alpha(1-\gamma)]G_K - (1-\alpha)(1-\gamma)[g+n])(G_K+\delta) \tag{10}$$

Oznaczając przez:

$$a = 1 - \alpha(1-\gamma) > 0 \tag{11}$$

$$b = (1-\alpha)(1-\gamma)(g+n) > 0 \tag{12}$$

oraz wstawiając a i b do równania (10) można je zapisać jako równanie różniczkowe Riccatiego postaci:

$$\dot{G}_K = -a\left(G_K - \frac{b}{a}\right)(G_K+\delta) \tag{13}$$

lub:

$$\dot{G}_K = -aG_K^2 + (b-a\delta)G_K + b\delta \tag{13a}$$

Równanie różniczkowe Riccatiego (13a) opisuje relacje pomiędzy przyrostem tempa akumulacji kapitału ($\dot{G}_K$) a tempem akumulacji owej zmiennej makroekonomicznej (G_K).

Jeśli przez $\Gamma(G_K)$ dane wzorem:

$$\Gamma(G_K) = -aG_K^2 + (b-a\delta)G_K + b\delta \tag{14a}$$

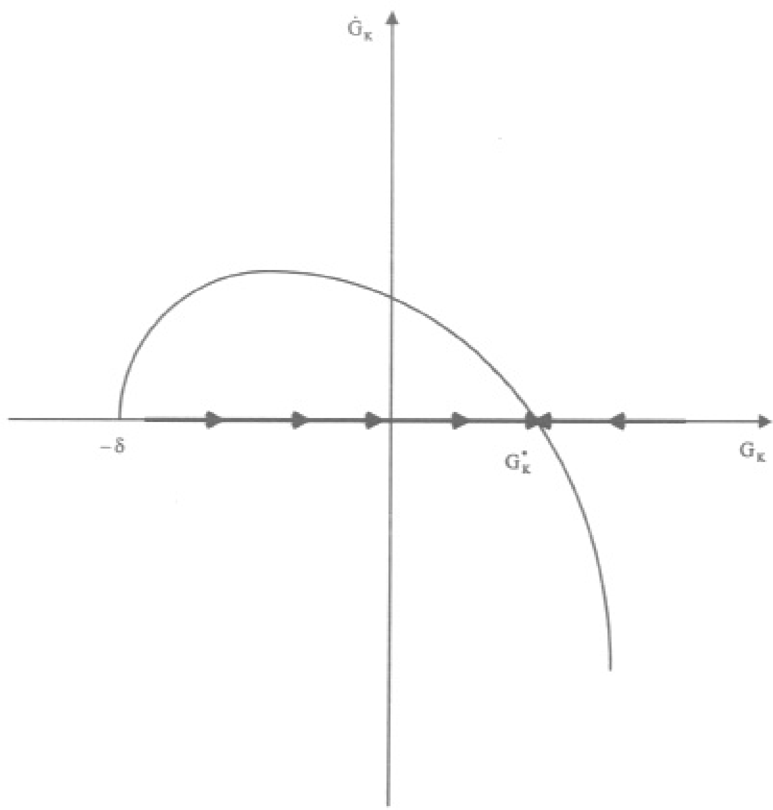
oznaczy się funkcję kwadratową odpowiadającą prawej stronie równania (13a) i policzy jej Δ:

$$\Delta = (b-a\delta)^2 + 4ab\delta = (b+a\delta)^2 > 0 \tag{14b}$$

to można pokazać, że funkcja $\Gamma\,(G_K)$ w przedziale $(-\delta;\,+\infty)$ przyjmuje wartości dodatnie dla $G_K \in \left(-\delta; \frac{b}{a}\right)$ i osiąga maksimum przy $G_K = \frac{b - a\delta}{2a}$[6].

Z ww. wniosków wynika, że relację pomiędzy przyrostem tempa akumulacji kapitału a tempem jego akumulacji przedstawić można tak, jak ma to miejsce na rysunku 2. Z rysunku tego wynika, że bez względu na wyjściowe tempo akumulacji kapitału $G_K(0) > -\delta$ analizowana tu gospodarka ma tendencje do dążenia do pewnego położenia długookresowej równowagi. W warunkach długookresowej równowagi przyrost tempa akumulacji kapitału $\dot{G}_K$ równy jest zeru, zaś stopa wzrostu kapitału kształtuje się na poziomie G_K^*, który (matematycznie rzecz biorąc) jest dodatnim pierwiastkiem funkcji $\Gamma\,(G_K)$. Oznacza to, iż długookresowe tempo akumulacji kapitału wynosi $G_K^* = \frac{b}{a}$.

Rysunek 2. Przyrosty tempa akumulacji kapitału ($\dot{G}_K$ a tempo akumulacji kapitału (G_K)



[6] Tempo akumulacji kapitału $G_K = \frac{b - a\delta}{2a}$, przy którym funkcja $\Gamma\,(G_K)$ osiąga maksimum może być zarówno dodatnie, jak i ujemne lub równe zeru. Nie ma to jednak większego znaczenia dla kształtowania się długookresowego tempa akumulacji kapitału.

By wyznaczyć ścieżkę czasową stopy wzrostu kapitału, która opisywać będzie dochodzenie do długookresowej równowagi tempa akumulacji kapitału G_K (t), należy rozwiązać równanie różniczkowe Riccatiego (13) lub (13a). Dokonując podstawienia Riccatiego postaci (por. np. [Krysicki, Włodarski, 1993, s. 264-265])[7]:

$$G_K = \frac{1}{v} - \delta \Rightarrow \dot{G}_K = -\frac{\dot{v}}{v^2} \tag{15}$$

równanie (13) można zapisać:

$$-\frac{\dot{v}}{v^2} = -a\left(\frac{1}{v} - \left[\delta + \frac{b}{a}\right]\right)\frac{1}{v} \tag{16}$$

Ponieważ $\delta + \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$, zatem równanie (16) sprowadza się do następującego równania różniczkowego:

$$-\frac{\dot{v}}{v^2} = -a\left(\frac{1}{v} - \frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)\frac{1}{v}$$

lub (wynikającego zeń) równania liniowego niejednorodnego:

$$\dot{v} = a - \sqrt{\Delta}\ v \tag{17}$$

Całka szczególna równania różniczkowego (17), będąca rozwiązaniem odpowiadającego mu równania jednorodnego postaci $\dot{v}_s + \sqrt{\Delta}\ v_s = 0$, dana jest wzorem:

$$v_s\,(t) = C_0\, e^{-\sqrt{\Delta}\, t};\ C_0 \in \Re \tag{18}$$

przy czym:

$$\dot{v}_s = -\sqrt{\Delta}\, v_s \tag{18a}$$

Niech całka równania (17) będzie iloczynem całki szczególnej v_s i nieznanej całki uzupełniającej v_D. Wówczas:

$$v = v_s v_D \tag{19a}$$

[7] Równanie różniczkowe Riccatiego (13-13a) posiada również całkę G_K (t) = $-\delta$, jednak rozwiązanie to sprzeczne jest z równaniem (3).

Z równań (18a) i (19a) wynika, że:

$$\dot{v} = -\sqrt{\Delta}\ v_s v_D + v_s \dot{v}_D \tag{19b}$$

Wstawiając (19ab) do (17) uzyskuje się:

$$-\sqrt{\Delta}\ v_S v_D + v_s \dot{v}_D = a - \sqrt{\Delta}\ v_s v_D$$

a stąd i z równania (18) dochodzi się do równania:

$$\dot{v}_D(t) = \frac{a}{C_0} e^{\sqrt{\Delta}\, t}$$

Całkując ww. równanie po czasie t uzyskuje się całkę uzupełniającą daną wzorem:

$$v_D(t) = \frac{a}{C_0} \int e^{\sqrt{\Delta}\, t} dt = \frac{a}{\sqrt{\Delta}\, C_0} e^{\sqrt{\Delta}\, t} + C_1; C_1 \in \Re \tag{20}$$

Z równań (18), (19a) i (20) wynika, że całka równania (17) dana jest wzorem:

$$v(t) = \frac{a}{\sqrt{\Delta}} + Ce^{\sqrt{\Delta}\, t}; C = C_0 C_1 \in \Re \tag{21}$$

Z równania (21) i podstawienia Riccatiego (15) wynika, że całka równania (13) dana jest wzorem:

$$G_K(t) = \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{\Delta}} + Ce^{-\sqrt{\Delta}\, t}} - \delta \tag{22}$$

Z równań (22), (11), (12) i (14b) wynika, że:

$$G_K^* = \lim_{t \to +\infty} G_K(t) = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{\Delta}} + Ce^{-\sqrt{\Delta}\, t}} - \delta \right] = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} - \delta = \frac{b}{a} = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)(g+n)}{1-\alpha(1-\gamma)} \tag{23}$$

Równanie (22) opisuje ścieżkę czasową tempa akumulacji kapitału w okresie dochodzenia do długookresowej równowagi, równanie (23) opisuje zaś długookresowe tempo akumulacji kapitału, która równoważy analizowaną w opracowaniu gospodarkę. Z równaniu (23) wyciągnąć można kilka następujących wniosków:

- Tempo akumulacji kapitału, po uwzględnieniu wpływu stopy procentowej na poziom inwestycji oraz inwestycji na popytową i podażową stronę gospodarki, jest niższe, niż ma to miejsce w modelu Solowa, gdzie bada się jedynie wpływ inwestycji na podażową stronę gospodarki. Z rozwiązania modelu Solowa (por. np. [Barro, Sala-i-Martin, 1995, rozdział 1]; [Romer, 1996, rozdział 1]; [Tokarski, 2001b, rozdział 2] lub [Tokarski, 2003]) wynika bowiem, że jeśli w gospodarce występuje postęp techniczny w sensie Harroda, to długookresowe tempo akumulacji kapitału wynosić powinno g+n. Z przedstawionego tu modelu

  wynika, iż wynosi ono $G_K^* = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)(g+n)}{1-\alpha(1-\gamma)} < g+n.$

- Długookresowe tempo akumulacji kapitału jest (podobnie jak w modelu Solowa) tym wyższe, im wyższa jest stopa harrodiańskiego postępu technicznego g i stopa wzrostu zatrudnienia n.
- Różniczkując G_K^* względem α i γ okazuje się, iż $\frac{\partial G_K^*}{\partial \alpha} = -\frac{\gamma(1-\gamma)(g+n)}{[1-\alpha(1-\gamma)]^2} < 0$

  oraz $\frac{\partial G_K^*}{\partial \gamma} = -\frac{(1-\alpha)(g+n)}{[1-\alpha(1-\gamma)]^2} < 0.$ Z nierówności tych wynika, że długookresowe tempo akumulacji kapitału jest tym niższe, im wyższe są: udział nakładów kapitału w produkcie α oraz elastyczność zagregowanego popytu względem produktu potencjalnego, czyli γ.
- Ponadto, przy elastycznym współczynniku kapitałochłonności wynikającym z neoklasycznej funkcji produkcji typu Cobba-Douglasa, nie występuje tzw. paradoks Domara. Paradoks ów polega na tym, iż gospodarka Domara znajduje się w stanie długookresowej równowadze popytu i podaży, wtedy i tylko wtedy, gdy rzeczywista stopa wzrostu inwestycji jest ilorazem stopy inwestycji do współczynnika kapitałochłonności. Jeśli jednak rzeczywista stopa wzrostu inwestycji w gospodarce Domara będzie mniejsza (większa) od ww. wielkości, to charakteryzować się będzie ona stanem permanentnej, nadwyżkowej podaży (popytu). Co więcej, przy stałej stopie wzrostu inwestycji, stopie inwestycji i współczynniku kapitałochłonności stan tej nierównowagi będzie się powiększał wraz z upływem czasu, a wyjście gospodarki Domara z owej sytuacji będzie niemal niemożliwe. Wynika to stąd, iż jeśli np. rzeczywista stopa wzrostu inwestycji w modelu Domara, 1962, będzie mniejsza od ilorazu stopy inwestycji do współczynnika kapitałochłonności, to inwestorzy uzmysłowią sobie, iż w gospodarce istnieją niewykorzystane moce wytwórcze i skłonni będą obniżyć rzeczywistą stopę wzrostu inwestycji. To zaś powiększy różnicę pomiędzy ww. ilorazem a rzeczywistą stopą wzrostu inwestycji, co przyczyni się do powiększenia nierównowagi na rynku produktu (por. np. [Chiang, 1994, s. 466-468]; [Ostoja-Ostaszewski, 1996, s. 225-228] lub [Tokarski, 2001b, rozdział 1]).

Wyznaczenie ścieżki czasowej tempa akumulacji kapitału (22) pozwala również (przy wykorzystaniu równania (9) opisującego relacje między tempem akumulacji kapitału a stopą wzrostu realnej stopy procentowej równoważącą analizowaną tu gospodarkę) na wyznaczenie ścieżki czasowej stopy wzrostu realnej stopy procentowej. Podstawiając równania (22), (11), (12) i (14b) do zależności (9) uzyskuje się:

$$G_r(t) = -\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)(g+n)}{\beta} + \\ -\frac{\alpha(1-\gamma)}{\beta}\left(\frac{1}{\dfrac{1-\alpha(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\gamma)(g+n)=[1-\alpha(1-\gamma)]\delta} + Ce^{-\sqrt{\Delta}\,t}} - \delta\right) \tag{24}$$

czyli:

$$G_r^* = \lim_{t\to+\infty} G_r(t) - \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)(g+n)}{\beta} + \\ -\frac{\alpha(1-\gamma)}{\beta}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\dfrac{1-\alpha(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\gamma)(g+n)=[1-\alpha(1-\gamma)]\delta} + Ce^{-\sqrt{\Delta}\,t}} - \delta\right)$$

a stąd:

$$G_r^* = -\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)(g+n)}{\beta[1-\alpha(1-\gamma)]} = -\frac{G_K^*}{\beta} \tag{25}$$

gdzie G_r^* jest długookresową stopą wzrostu realnej stopy procentowej.

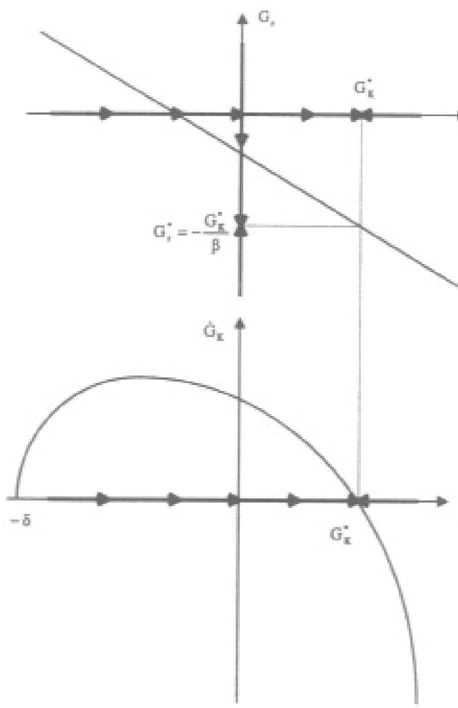
Z równania długookresowej stopy wzrostu realnej stopy procentowej (a właściwie stopy spadku owej stopy procentowej) wyciągnąć można następujące wnioski natury ekonomicznej:

- Długookresowa stopa spadku realnej stopy procentowej $|G_r^*| = -\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)(g+n)}{\beta[1-\alpha(1-\gamma)]} = \frac{G_K^*}{\beta}$ jest ilorazem długookresowego tempa akumulacji kapitału G_K^* i modułu elastyczności inwestycji I oraz zagregowanego popytu Y^d względem realnej stopy procentowej, czyli β. Wynika stąd, iż długookresowe, względne obniżki realnej stopy procentowej powinny być tym wyższe, im szybsze jest tempo akumulacji kapitału w gospodarce oraz im słabiej inwestycje i zagregowany popyt reagują na zmiany realnej stopy procentowej. Ów wpływ elastyczności inwestycji i zagregowanego popytu na optymalne obniżki stóp procentowych wynika stąd, iż im większa jest wrażliwość owych zmiennych makroekonomicznych na zmiany realnych stóp procentowych, tym niższe powinny być względne obniżki owych stóp procentowych, które dostosowują zagregowany popyt do podażowych możliwości gospodarki.

- Co więcej, ponieważ $|G_r^*| = \frac{G_K^*}{\beta}$, zaś $\frac{\partial G_K^*}{\partial \alpha} = -\frac{\gamma(1-\gamma)(g+n)}{[1-\alpha(1-\gamma)]^2} < 0$ oraz $\frac{\partial G_K^*}{\partial \gamma} = -\frac{(1-\alpha)(g+n)}{[1-\alpha(1-\gamma)]^2} < 0$, zatem względne obniżki realnych stóp procentowych powinny być również tym wyższe, im niższy jest udział nakładów kapitału w produkcie α i elastyczność γ zagregowanego popytu względem produktu potencjalnego.

Mechanizm dochodzenia tempa akumulacji kapitału i stopy wzrostu realnej stopy procentowej do długookresowej równowagi przedstawiony jest na rysunku 3. Rysunek ten jest diagramem fazowym ilustrującym dynamikę analizowanego w opracowaniu modelu. Z diagramu fazowego na rysunku 3 wynika, że jeśli gospodarka w momencie t = 0 charakteryzuje się tempem akumulacji kapitału $G_K(0)$ większym (mniejszym) od G_K^*, to tempo akumulacji kapitału rosło (spadało) będzie aż do osiągnięcia poziomu G_K^*. Jednocześnie bank centralny, chcąc zachować równowagę makroekonomiczną rozważanej gospodarki, powinien kształtować stopę wzrostu realnej stopy procentowej na poziomie wyższym (niższym) od G_r^* aż do momentu, w którym tempo akumulacji kapitału nie osiągnie poziomu G_K^*.

Rysunek 3. Dochodzenie do długookresowej równowagi modelu



Oznaczając przez $G_Y \equiv \dot{Y}^S/Y^S$ stopę wzrostu zagregowanej podaży można również wyznaczyć zarówno ścieżkę wzrostu, jak i długookresową stopę wzrostu ww. zmiennej makroekonomicznej. Z równań (1) i (5) wynika bowiem, że:

$$G_Y = \alpha G_K + (1 - \alpha)(g + n) \tag{26}$$

Oznaczając przez $G_Y^* = \lim\limits_{t \to +\infty} G_Y(t)$ długookresową stopę wzrostu zagregowanej podaży i uwzględniając równanie (26) okazuje się, iż:

$$G_Y^* = \lim_{t \to +\infty} G_Y(t) = (1-\alpha)(g+n) + \alpha \lim_{t \to +\infty} G_K(t) = (1-\alpha)(g+n) + \alpha G_K^*$$

a stąd oraz równania (23) wynika, że:

$$G_Y^* = \frac{(1-\alpha)(g+n)}{1-\alpha(1-\gamma)} \tag{27}$$

Z równania (23) oraz zależności (27) uzyskać można relację:

$$G_K^* < G_Y^* < g + n \tag{27a}$$

Z równań (27-27a) wyciągnąć można następujące wnioski:

- Długookresowa stopa wzrostu produktu w rozważanym tu modelu jest tym wyższa, im wyższa jest stopa wzrostu zatrudnienia n i stopa egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda g. Co więcej, ponieważ $\frac{\partial G_Y^*}{\partial \alpha} = -\frac{\gamma(g+n)}{[1-\alpha(1-\gamma)]^2} < 0$ oraz $\frac{\partial G_Y^*}{\partial \gamma} = -\frac{\alpha(1-\alpha)(g+n)}{[1-\alpha(1-\gamma)]^2} < 0$, zatem ww. stopa wzrostu jest również tym wyższa, im niższy jest udział nakładów kapitału w produkcie lub elastyczność zagregowanego popytu względem produktu potencjalnego.
- Ponadto długookresowa stopa wzrostu produktu jest niższa niż wynika to z rozwiązania modelu Solowa (gdyż $G_Y^* < g + n$) oraz wyższa od długookresowego tempa akumulacji kapitału (bo $G_Y^* > G_K^*$).

Skalibrowane długookresowe ścieżki czasowe

W tej części opracowania przedstawione zostaną skalibrowane ścieżki czasowe stóp wzrostu kapitału, realnej stopy procentowej i produktu, które wynikają z równań (22), (24) i (26). By wyznaczyć ww. ścieżki czasowe należy najpierw wyrugować stałą całkowania C z równań (24) i (26). Przyjmując, że w momencie $t = 0$ tempo akumulacji kapitału wynosiło $G_K(0) = G_K^0 > -\delta$

i korzystając z równania (22) można pokazać, że stała całkowania w ww. równaniach musi być dana następującym wzorem:

$$C = \frac{1}{G_K^0 + \delta} - \frac{a}{\sqrt{\Delta}} \tag{28}$$

Wstawiając równanie (28) do równań (22) i (24) okazuje się, że:

$$G_K(t) = \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{\Delta}} + \left(\frac{1}{G_K^0 + \delta} - \frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)e^{-\sqrt{\Delta}\,t}} - \delta \tag{29}$$

$$G_r(t) = -\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)(g+n)}{\beta} + \\ -\frac{\alpha(1-\gamma)}{\beta}\left(\frac{1}{\frac{1-\alpha(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\gamma)(g+n)+[1-\alpha(1-\gamma)]\delta} + \left(\frac{1}{G_K^0+\delta} - \frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)e^{-\sqrt{\Delta}\,t}} - \delta\right) \tag{30}$$

Równania (29-30) wyznaczają ścieżki czasowe tempa akumulacji kapitału i stopy wzrostu realnych stóp procentowych odpowiadające wyjściowemu tempu akumulacji kapitału $G_K^0 > -\delta$.

Kalibrując zmienne egzogeniczne w rozważanym w pracy modelu na poziomie:

- udział nakładów kapitału w produkcie $\alpha = 1/3$;
- moduł elastyczności zagregowanego popytu lub popytu inwestycyjnego względem realnej stopy procentowej $\beta = 0.2$;
- elastyczność zagregowanego popytu względem produktu potencjalnego $\gamma = 0.8$;
- stopa deprecjacji kapitału $\delta = 5\%$;
- stopa wzrostu zatrudnienia $n = 1\%$;
- stopa postępu technicznego $g = 2\%$;

okazuje się, iż: $a \approx 0.9333$; $b = 0.004$; $\Delta \approx 0.00257$. Wówczas równania (26), (29) i (30) można zapisać następująco:

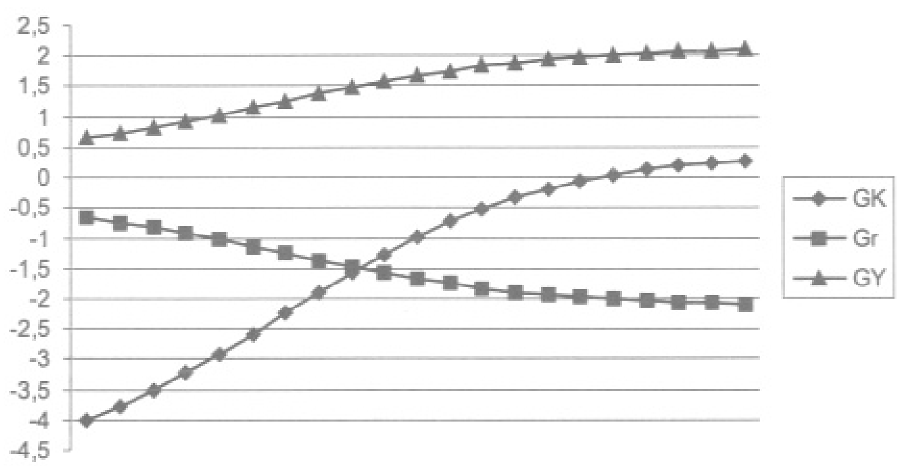
$$G_K(t) = \frac{1}{18.421 + \left(\frac{1}{G_K^0 + 0.05} - 18.421\right)e^{-0.0507\,t}} - 0.05 \tag{31}$$

$$G_r(t) = -0.02 - 0.333\left(\frac{1}{18.421 + \left(\frac{1}{G_K^0 + 0.05} - 18.421\right)e^{-0.0507\,t}} - 0.05\right) \tag{32}$$

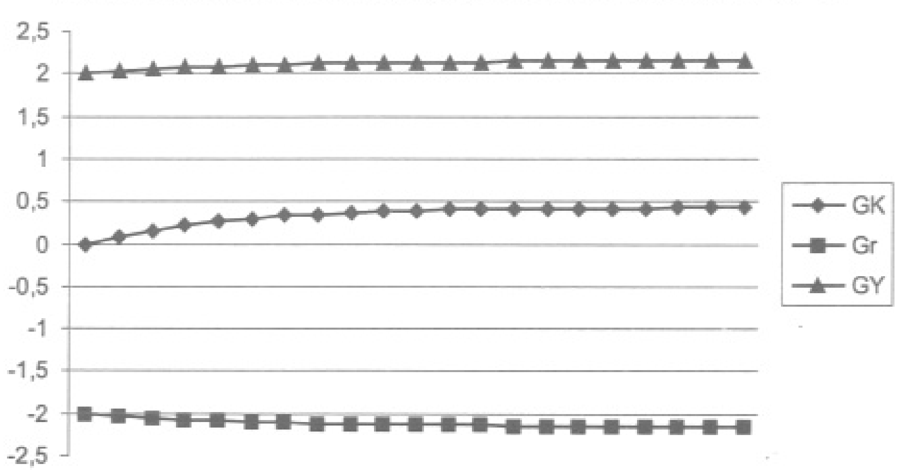
$$G_Y(t) = 0.00333 + \frac{1}{18.421 + \left(\frac{1}{G_K^0 + 0.05} - 18.421\right)e^{-0.0507t}} \quad (31)$$

W oparciu o równania (31-33) skalibrowano długookresowe ścieżki czasowe stóp wzrostu kapitału, realnej stopy procentowej i produkcji przy bardzo niskich (– 4%), niskich (0%) i wysokich (4%) wyjściowych stopach wzrostu kapitału. Ścieżki te przedstawione są na rysunkach 4-6.

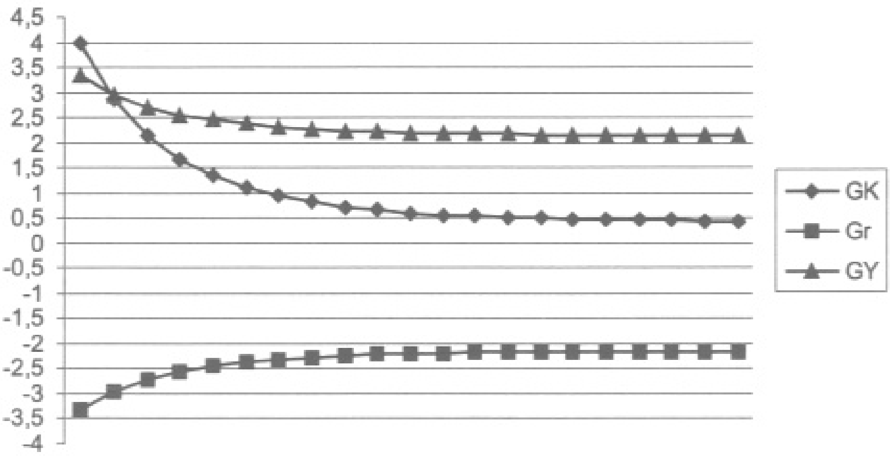
Rysunek 4. Skalibrowane, długookresowe ścieżki czasowe stóp wzrostu kapitału (G_K), stopy procentowej (G_r) i produkcji (G_Y) przy tempie akumulacji kapitału G_K^0 = – 4%



Rysunek 5. Skalibrowane, długookresowe ścieżki czasowe stóp wzrostu kapitału (G_K), stopy procentowej (G_r) i produkcji (G_Y) przy tempie akumulacji kapitału G_K^0 = 0%



Rysunek 6. Skalibrowane, długookresowe ścieżki czasowe stóp wzrostu kapitału (G_K), stopy procentowej (G_r) i produkcji (G_Y) przy tempie akumulacji kapitału G_K^0 = 4%



Z rysunków 4-6 wyciągnąć można kilka następujących wniosków:

- Jeśli gospodarka jest w stanie równowagi makroekonomicznej i charakteryzuje się bardzo niskim tempem akumulacji kapitału (– 4%), to bank centralny powinien rozpocząć od bardzo ostrożnej redukcji realnych stóp procentowych (nieco więcej niż 0,5%) i następnie poruszać się po ścieżce czasowej owej redukcji dochodzącej do ok. 2%. Powinno to zagwarantować dojście stopy wzrostu kapitału do ok. 0,5% i stopy wzrostu produktu do ok. 2%.
- Jeśli zaś wyjściowa stopa wzrostu kapitału wynosi ok. 0%, to bank centralny powinien ustabilizować stopę wzrostu realnych stóp procentowych na poziomie ok. – 2%, co pozwoli podnieść tempo akumulacji kapitału do ok. 0,5% i stopę wzrostu produktu do nieco ponad 2%.
- W warunkach wysokiego wyjściowego tempa akumulacji kapitału (rzędu 4%) bank powinien rozpocząć od redukcji realnych stóp procentowych na poziomie ok. 3,5% i dochodzić po przedstawionej na rysunku 6 ścieżce czasowej do poziomu redukcji wynoszącej ok. 2%. W tej sytuacji tempo akumulacji kapitału powinno również ustabilizować się na poziomie ok. 0,5% a tempo wzrostu produkcji na poziomie nieco powyżej 2%.

Podsumowanie i wnioski

Prowadzone w opracowaniu rozważania można podsumować następująco:

- Analizując wpływ realnych stóp procentowych na długookresową równowagę wzrostu gospodarczego wygodnie jest posługiwać się modelem wzrostu będącym kompilacją modeli wzrostu typu [Domara, 1962] i [Solowa, 1956]. Wynika to stąd, iż zmiana realnych stóp procentowych powinna prowadzić do zmian poziomu inwestycji w gospodarce. To zaś oddziaływać będzie zarówno na popytową stronę gospodarki, poprzez efekty mnożnikowe, jak i na jej stronę podażową, poprzez zmianę tempa akumulacji kapitału rzeczowego. Kompilacja modelu wzrostu Domara (popytowe i podażowe efekty inwestycji) z modelem wzrostu Solowa (o elastycznym współczynniku kapitałochłonności) pozwala na wyznaczenie długookresowej równowagi rozważanej gospodarki wolnej od zagadnienia ostrza noża i paradoksu Domara.

- Co więcej, kompilacja taka wydaje się również być użyteczna przy próbie wyznaczenia długookresowych reguł polityki monetarnej polegającej na zmianach realnych stóp procentowych. Z prowadzonych w pracy rozważań wynika bowiem, że bank centralny może dostosowywać realne stopy procentowe do tempa akumulacji kapitału tak, by w pełni wykorzystywać istniejące w gospodarce czynniki produkcji. Stopy wzrostu realnej stopy procentowej w ww. warunkach są liniową, malejącą funkcją tempa akumulacji kapitału. Wynika stąd, że w warunkach wysokiego tempa akumulacji kapitału bank centralny powinien obniżać realne stopy procentowe w takim tempie, by nie dopuścić do obniżenia zagregowanego popytu poniżej produktu potencjalnego. Podnoszenie realnych stóp procentowych ma (z ww. punktu widzenia) sens jedynie wówczas, gdy tempo akumulacji kapitału jest na bardzo niskim poziomie, gdyż wówczas utrzymanie realnych stóp procentowych na niskim poziomie groziłoby ekspansją zagregowanego popytu powyżej produktu potencjalnego, czego efektem byłaby krótko- lub długookresowa presja inflacyjna.
- Z prezentowanego w opracowaniu modelu wynika również, że jeśli bank centralny będzie stosował przedstawione w pracy reguły polityki monetarnej, to tempo akumulacji kapitału i stopy wzrostu produktu (podobnie jak w neoklasycznych modelach wzrostu typu Solowa czy Mankiwa-Romera-Weila) ukształtują się na pewnym stałym poziomie, wynikającym w dużej mierze ze stopy egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda oraz z tempa wzrostu liczby pracujących. Warto jednak zauważyć, że długookresowe rozwiązanie prezentowanego tu modelu wyznacza długookresowe ścieżki wzrostu kapitału i produktu o niższym nachyleniu niż ma to miejsce w modelach Solowa czy Mankiwa-Romera-Weila. Wynika to, jak się wydaje, stąd, iż w modelach neoklasycznych nie uwzględnia się ograniczeń popytowych (związanych ze wzrostem gospodarczym) i analizuje jedynie ścieżkę produktu potencjalnego, zaś *w rzeczywistości, która jest przedmiotem opisu, nie jest na ogół spełnione teoretyczne założenie, iż produkcja realizuje się na poziomie potencjalnie określonym* [Welfe, 2000, s. 64]. Ponieważ jednak w prezentowanym w pracy modelu rozważa się również popytowe ograniczenia procesów wzrostu gospodarczego, zatem uzyskuje się rozwiązanie o niższych długookresowych stopach wzrostu gospodarczego niż ma to miejsce w modelach neoklasycznych.

Bibliografia

Barro R.J., Sala-i-Martin X., [1995], *Economic Growth*, McGraw-Hill Inc., New York etc.

Chiang A.C., [1994], *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa.

Domar E.D., [1962], *Szkice z teorii wzrostu gospodarczego*, PWN, Warszawa.

Krysicki W., Włodarski L., [1993], *Analiza matematyczna w zadaniach*, część II, PWN, Warszawa.

Lippi F., [2002], *Polityka pieniężna w warunkach nieoznaczonej produkcji potencjalnej*, referat na konferencję NBP *Reformy strukturalne a polityka pieniężna*, Falenty, 24-25 październik 2002.

Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N., [1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, May 1992.

Ostoja-Ostaszewski A., [1996], *Matematyka w ekonomii. Modele i metody*, tom 2 *Elementarny rachunek różniczkowy*, PWN, Warszawa.

Romer D., [1996], *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill Inc., New York etc.

Rotemberg J.J., Woodford M., [1999], *Interest Rate Rules in an Estimated Sticky Price Model*, [w:] J.B. Taylor, [1999].

Solow R.M., [1956], *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, February 1956.

Taylor J.B., [1993], *Discretion versus Policy Rules in Practice*, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 39.

Taylor J.B., [1999], *Monetary Policy Rules*, NBER-Business Cycles Series, Vol. 39, The University of Chicago Press, Chicago.

Tokarski T., [2001a], *Dwadzieścia lat renesansu teorii wzrostu gospodarczego. Na ile lepiej rozumiemy jego mechanizm?*, [w:] A. Wojtyna, [2001].

Tokarski T., [2001b], *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali*, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Tokarski T., [2003], *Specyfikacja funkcji produkcji a równowaga długookresowego wzrostu gospodarczego*, Ekonomista nr 3/2003.

Welfe W., [2000], *Empiryczne modele wzrostu we wzrost gospodarczy, restrukturyzacja i bezrobocie w Polsce. Ujęcie teoretyczne i praktyczne*, [2000].

Wojtyna A., [2000], *Ewolucja keynesizmu a główny nurt ekonomii*, seria Współczesna ekonomia, PWN, Warszawa.

Wojtyna A. (red.), [2001], *Czy ekonomia nadąża z wyjaśnieniem rzeczywistości?*, Materiały z VII Kongresu Ekonomistów Polskich – styczeń 2001, tom I, Wydawnictwo PTE-Bellona, Warszawa.

Wzrost gospodarczy, restrukturyzacja i bezrobocie w Polsce. Ujęcie teoretyczne i praktyczne, [2000], materiały pokonferencyjne, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

MONETARY POLICY RULES IN CONDITIONS OF LONG-TERM DOMAR-SOLOW EQUILIBRIUM

Summary

This study provides an analysis of monetary policy rules base on the Domar-Solow growth model. The study adopts the following assumptions:

1. Investment affects both the demand and the supply-side of the economy. Thanks to multiplier effects, the rise in investment involves demand growth (the Domar model), and through capital formation it adds to aggregate supply (Domar and Solow models).
2. Investment is a decreasing function of the interest rate, which is set by the central bank.

3. Supply is generated by the neoclassical production function (the Solow model).
4. The central bank sets interest rates at such a level so that (i) demand equalled supply, thus leading to full capacity utilisation in the economy; (ii) the unemployment rate was stable.

The main conclusions to be drawn from the above model are the following:

1. The capital growth rate is described by the Riccati Differential Equation, which provides a stable long-term solution.
2. Growth rates of interest rates should be decreasing, linear functions of the growth rate of capital and should be (generally) negative.
3. The model excludes the so-called Domar paradox involved with the „knife-edge" issue due to the flexible capital-intensity ratio represented in the function.
4. Long-term capital and GDP growth rates are lower than is the case with the Solow growth model.