OSPODARKA
NARODOWA

9
(193)
Rok XVIII
wrzesień
2007

Tomasz TOKARSKI*

Optymalne stopy inwestycji w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego

Wprowadzenie[1]

Celem prezentowanego opracowania jest próba teoretycznego wyznaczenia optymalnej struktury stóp inwestycji na gruncie N-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego. Model ten stanowi kompilację i rozszerzenie modeli prezentowanych w pracach Solowa [1956], Mankiwa, Romera, Weila [1992], Nonnemana, Vanhoudta [1996] i Tokarskiego [1996; 2000; 2003; 2005, rozdziały piąty i siódmy] z elementami modeli optymalnego sterowania typu Ramseya [1928], Lucasa [1988] i Romera [1986, 1990].

W prezentowanym w opracowaniu modelu wzrostu gospodarczego zakłada się, iż:

- na wielkość wytworzonego w gospodarce strumienia produktu wpływa skończona ilość N zasobów kapitału oraz zasoby pracy i technologii (przyjmuje się też, że zasoby pracy i technologii rosną według pewnych, danych egzogenicznie stóp wzrostu),
- przyrost każdego z analizowanych zasobów kapitału jest różnicą pomiędzy inwestycjami w ów zasób a jego deprecjacją (założenia te nawiązują do neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego Solowa, Mankiwa-Romera-Weila czy Nonnemana-Vanhoudta),
- zachowujący się racjonalnie typowy konsument (podobnie jak ma to miejsce np. w modelach wzrostu endogenicznego Lucasa czy Romera) szuka takiej długookresowej struktury stóp inwestycji, która maksymalizuje sumę zdys-

* Autor jest pracownikiem Instytutu Ekonomii i Zarządzania Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie oraz Wyższej Szkoły Handlowej im. B. Markowskiego w Kielcach. Artykuł wpłynął do redakcji w lutym 2007 r.

1 Autor dziękuje dr I. Świeczewskiej z Uniwersytetu Łódzkiego za uwagi do matematycznej strony prezentowanego opracowania.

kontowanej użyteczności konsumpcji tego konsumenta w nieskończonym horyzoncie czasowym,

- dodatkowo czyni się założenie, że rozważana w prezentowanym modelu wzrostu gospodarczego makroekonomiczna funkcja produkcji (opisująca wielkość wytworzonego w gospodarce strumienia produktu) nie musi się *a priori* charakteryzować stałymi efektami skali (założenie to nawiązuje do rozważań prowadzonych np. w pracach Tokarskiego [1996, 2003 lub 2005, rozdział siódmy])[2].

Prowadzone w pracy rozważania oparte są na silnym założeniu nowej ekonomii klasycznej (i teorii realnego cyklu koniunkturalnego) o długookresowej racjonalności zachowań typowych podmiotów makroekonomicznych (utożsamianych dalej z typowym konsumentem). Warto jednak w tym miejscu zaznaczyć, że o ile w modelach nowej ekonomii klasycznej (w tym, w szczególności, w szkole realnego cyklu koniunkturalnego) *a priori* zakłada się, iż zachowania i oczekiwania typowych podmiotów mikroekonomicznych są racjonalne tak w długim, jak i w krótkim okresie, o tyle w prowadzonych w pracy analizach założenie to ograniczone jest jedynie do okresu długiego. Ograniczenie owego założenia wynika stąd, że w długim okresie szoki popytowej i podażowej strony gospodarki odgrywają zdecydowanie mniejszą rolę niż w okresie krótkim, co implikuje, że podmioty podejmują wówczas optymalne decyzje. Problem ten nie jest jednak jednoznacznie rozstrzygnięty na gruncie współczesnej makroekonomii, gdyż np. Solow twierdzi, że *Nie wiem, jaki zbiór twierdzeń dotyczących oczekiwań zasługuje na włączenie do fundamentalnych zasad praktycznej makroekonomii. Czuję się bardzo zakłopotany tym, iż ten nieobserwowalny czynnik ma kolosalne znaczenie, a jednocześnie jest tak niejednoznaczny, że może służyć wyjaśnieniu praktycznie wszystkiego (...) W moim odczuciu, racjonalne oczekiwania odgrywają ważną rolę w modelowaniu długookresowej równowagi. Jeśli zaś chodzi o okres krótki, to hipoteza racjonalnych oczekiwań wydaje się mało przydatna* (Solow [1998, s. 76]) Lucas zaś utrzymuje, że zarówno w analizach krótko-, jak i długookresowych *niezbędne jest modelowanie sposobów dokonywania wyborów przez ludzi. Jeśli widzicie, że jadę ulicą Clarka w kierunku północnym, to odgadnięcie, że kilka minut później będę jechał nadal na północ tą samą ulicą jest całkiem udaną (choć niedoskonałą) prognozą. Lecz jeżeli chcecie przewidzieć, jak się zachowam, jeśli ulica Clarka jest zamknięta, to musicie mieć jakieś wyobrażenie o tym dokąd jadę i jakie mam przed sobą alternatywne*

---

2 W prowadzonych w pracy analizach pojęcie efektów skali makroekonomicznej funkcji produkcji utożsamia się z jej jednorodnością pewnego stopnia $\Xi > 0$. Co więcej, przyjmuje się, iż jeżeli stopień jednorodności Ξ będzie większy (mniejszy) od jedności, to funkcja ta charakteryzować się będzie rosnącymi (malejącymi) efektami skali, natomiast przy $\Xi = 1$ występować będą stałe efekty skali makroekonomicznej funkcji produkcji. Wynika to stąd, że przy $\Xi > 1$ ($\Xi < 1$) dowolne ζ-krotne, przy czym $\zeta > 1$, zwiększenie nakładów każdego z czynników produkcji prowadzi do więcej (mniej) niż ζ-krotnego wzrostu produktu. Natomiast przy $\Xi = 1$ ζ-krotny wzrost nakładów każdego z czynników produkcji prowadzi do dokładnie ζ-krotnego wzrostu wytworzonego strumienia produktu.

drogi, a więc o charakterze mojego problemu decyzyjnego (z wywiadu z Lucasem w Snowdon, Vane, Wynarczyk [1998, s. 231]).

Przykłady tego typu kontrowersji we współczesnej makroekonomii można mnożyć. Z jednej bowiem strony Friedman, argumentując za pionowym kształtem długookresowej krzywej Phillipsa, dopuszcza istnienie krótkookresowej iluzji pieniężnej (co siłą rzeczy, wyklucza racjonalny charakter zachowań podmiotów mikroekonomicznych), z drugiej zaś strony modele realnego cyklu koniunkturalnego czy modele Beckera [1990] oparte są na założeniu pełnej racjonalności podmiotów mikroekonomicznych.

W prowadzonych w opracowaniu rozważaniach założenie o racjonalności oczekiwań i zachowań typowych podmiotów mikroekonomicznych nie oznacza bynajmniej, by autor sądził, że nawet w długim okresie wszystkie podmioty w gospodarce zachowują się racjonalnie i nie popełniają błędów w ocenie rzeczywistości mikro- i makroekonomicznej. Oznacza ono jedynie, że *Podczas gdy niektóre podmioty zbyt wysoko szacują określony współczynnik* [opisujący rzeczywistość gospodarczą-przyp. aut.], *inne szacują go zbyt nisko. Poprawny jest tylko średni szacunek* (Mayer [1996, s. 135]), czyli oczekiwania typowego podmiotu w gospodarce (por. też Blaug [1994, s. 681-691], Mayer [1996, s. 134-137], Snowdon, Vane, Wynarczyk [1998, s. 199-204] lub Tokarski [2005, s. 107-108]).

Model

W prowadzonych dalej analizach przyjmuje się następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki:

1. Proces produkcyjny opisany jest przez N-czynnikową makroekonomiczną funkcję produkcji Cobba-Douglasa daną wzorem[3]:

$$Y = (AL)^{\Theta} \prod_{i=1}^{N} K_i^{\alpha_i} \tag{1}$$

gdzie Y jest strumieniem wytworzonego produktu, K_i to nakłady i-tego dobra kapitałowego (dla $i = 1, 2, \ldots, N$), A – zasób technologii, którego wzrost ma charakter egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda, L – liczba pracujących, $\Theta \in (0;1)$ jest elastycznością produkcji względem nakładów pracy, zaś $\alpha_i \in (0;1)$ to elastyczność produktu względem nakładów i-tego dobra kapitałowego (dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$). Czyni się również założenie, że $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \in (0;1)$. Ze specyfikacji funkcji produkcji (1) wynika, iż jest ona jednorodna (względem nakładów kapitałowych i nakładów pracy) stopnia

[3] O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych *implicite* zakłada się, że są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \in [0; +\infty)$. Zapis $\dot{x} \equiv \dot{x}(t) \equiv dx/dt$ oznaczał będzie pochodną zmiennej x po czasie t, czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości owej zmiennej w momencie $t \in [0; +\infty)$.

$\Xi = \Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_1$. Płynie stąd wniosek, iż jeśli stopień jednorodności owej funkcji Ξ będzie mniejszy (większy) od jedności, to funkcja ta charakteryzować się będzie malejącymi (rosnącymi) efektami skali. W przypadku, w którym $\Xi = 1$ wystąpią zaś (charakterystyczne dla neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego typu Solowa lub Mankiwa-Romera-Weila) stałe efekty skali.

2. Przyrost nakładów każdego z zasobów kapitałów stanowi różnicę pomiędzy inwestycjami w ów zasób a jego deprecjacją. Inwestycje w i-ty zasób kapitału stanowią s_i-tą część wytworzonego produktu (dla $i = 1, 2, \ldots, N$), zaś stopy deprecjacji kolejnych nakładów kapitałowych wynoszą $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$. Płynie stąd wniosek, że w każdym momencie $t \in [0; +\infty)$ zachodzi:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \dot{K}_i = s_i Y - \delta_i K_i \tag{2}$$

gdzie $s_1, s_2, \ldots, s_N, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N \in (0;1)$ oraz $\sum_{i=1}^{N} s_1 \in (0;1)$,

3. Zasób technologii rośnie według stopy wzrostu $g > 0$ (będącej stopą harrodiańskiego postępu technicznego), natomiast stopa wzrostu liczby pracujących równa jest $n > 0$. Oznacza to, że zachodzą następujące związki:

$$\dot{A}/A = g \Rightarrow A(t) = A_0 e^{gt} \tag{3}$$

$$\dot{L}/L = n \Rightarrow L(t) = L_0 e^{nt} \tag{4}$$

gdzie $A_0 > 0$ i $L_0 > 0$ to (odpowiednio) zasób technologii i liczba pracujących w momencie $t = 0$.

4. Konsumpcja C stanowi różnicę pomiędzy produkcją Y a sumą inwestycji $\sum_{i=1}^{N} s_i Y$, czyli:

$$C = \left(1 - \sum_{i=1}^{N} s_i\right) Y \tag{5}$$

5. Celem działania typowego konsumenta, podobnie jak w modelu Ramseya lub modelach wzrostu endogenicznego Lucasa i Romera, jest maksymalizacja sumy zdyskontowanej użyteczności konsumpcji owego konsumenta w nieskończonym horyzoncie czasowym. Suma ta opisana jest przez następującą całkę niewłaściwą (zwaną dalej również całką preferencji typowego konsumenta):

$$\int_0^{+\infty} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} e^{-\rho t} \, dt \tag{6}$$

gdzie $c \equiv C/L$ jest konsumpcją na pracującego, $\rho > 0$ to stopa dyskontowa typowego konsumenta, $\sigma \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ jest zaś odwrotnością międzyokresowej substytucji konsumpcji. Im wyższe wartości przyjmują ρ i σ, tym bardziej analizowany konsument preferuje konsumpcję bieżącą w stosunku do konsumpcji przyszłej.

Z równań (1) wynika, że wydajność pracy $y \equiv Y/L$ dana jest wzorem:

$$y = \frac{(AL)^{\Theta} \prod_{i=1}^{N} K_i^{\alpha_i}}{L} = A^{\Theta} L^{\Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - 1} \prod_{i=1}^{N} k_i^{\alpha_i}$$

gdzie $k_i \equiv K_i/L$ jest nakładem i-tego dobra kapitałowego przypadającym na jednego pracującego (dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$). Z powyższej zależności oraz z równań (3-4) płynie wniosek, że zachodzi następujący związek:

$$y = \hat{A} e^{\Phi t} \prod_{i=1}^{N} k_i^{\alpha_i} \tag{7}$$

przy czym $\hat{A} = A_0^{\Theta} L_0^{\Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - 1} > 0$, zaś $\Phi = \Theta g + \left(\Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - 1\right) n$. Równanie (7) jest funkcją wydajności pracy w rozważanym modelu wzrostu gospodarczego. Funkcja ta opisuje relacje zachodzące pomiędzy nakładami każdego z czynników kapitałowych przypadających na pracującego a poziomem realizowanego w gospodarce strumienia produktu na pracującego. Z funkcji wydajności pracy (7) płynie m.in. wniosek, iż związki zachodzące pomiędzy krańcowym produktem i-tego zasobu kapitału ($\partial y/\partial k_i$) a produktywnością owego czynnika produkcji (y/k_i) opisują zależności:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \frac{\partial y}{\partial k_i} = \alpha_i \hat{A} e^{\Phi t} k_i^{\alpha_i - 1} \prod_{j=1; j \neq i}^{N} k_j^{\alpha_j} = \alpha_i \frac{y}{k_i} \tag{8}$$

Dzieląc stronami równania różniczkowe (2) przez liczbę pracujących L uzyskuje się związki:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \frac{\dot{K}_i}{L} = s_i y - \delta_i k_i \tag{9}$$

Co więcej, ponieważ $k_i \equiv K_i/L$, zatem $K_i = k_i L$, co implikuje, iż dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ zachodzi: $\dot{K}_i = \dot{k}_i L + k_i \dot{L}$. Stąd oraz z równania (4) wynika, że:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \frac{\dot{K}_i}{L} = \dot{k}_i + n k_i$$

Z powyższej zależności oraz równania (9) wyciągnąć można wniosek, że dla każdego i = 1, 2, …, N przyrost i-tego zasobu kapitału na pracującego, w każdym momencie $t \in [0;+\infty)$, opisuje równanie różniczkowe:

$$\dot{k}_i = s_i y - (\delta_i + n)k_i \tag{10}$$

Po podzieleniu związku (5) przez liczbę pracujących uzyskuje się równanie konsumpcji na pracującego postaci:

$$c = \left(1 - \sum_{i=1}^{N} s_i\right) y \tag{11}$$

co implikuje, że całkę preferencji (6) można zapisać następująco:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left[\left(1 - \sum_{i=1}^{N} s_i\right) y\right]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\rho t} \, dt \tag{12}$$

Zależności (7) oraz (10-11) można interpretować ekonomicznie następująco. Konsumpcja na pracującego c jest tym wyższa, im wyższy jest poziom wydajności pracy y oraz im niższe są stopy inwestycji s_i (dla i = 1, 2, …, N). Poziom wydajności pracy jest rosnącą funkcją nakładów każdego z kapitałów k_i. Przyrosty owych zasobów kapitału są zaś tym wyższe, im wyższe są stopy inwestycji w poszczególne czynniki kapitałowe. Ponieważ zakłada się, że typowy konsument w gospodarce zachowuje się racjonalnie, zatem wybiera taką strukturę ścieżek czasowych stóp inwestycji s_1, s_2, …, s_N, które maksymalizują całkę preferencji (12) przy ograniczeniu równaniami różniczkowymi (10). Płynie stąd wniosek, że konsument ów powinien wyznaczyć następujące maksimum Pontriagina[4]:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{s_1 s_2, \ldots, s_N} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left[\left(1 - \sum_{i=1}^{N} s_i\right) y\right]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\rho t} \, dt \\ \mathop{\forall}\limits_{i=1,2,\ldots,N} \dot{k}_i = s_i y - (\delta_i + n)k_i \\ \mathop{\forall}\limits_{i=1,2,\ldots,N} k_i(0) = k_i^0 > 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

gdzie k_i^0 to zasób i-tego kapitału na pracującego (dla i = 1, 2, …, N) w momencie t = 0. Bieżący hamiltonian maksimum Pontriagina (13) dany jest wzorem:

[4] Maksimum Pontriagina syntetycznie omówione jest np. w pracach Chianga [1992, s. 210-212 i 250-257] lub Barro, Sala-i-Martina [1995, s. 498-510]. Szeroki przegląd możliwości aplikacji maksimum Pontriagina w modelowaniu procesów wzrostu gospodarczego znajduje się zaś np. w pracach Panka [1986, 2000].

$$H(s_1, s_2, \ldots, s_N, k_1, k_2, \ldots, k_N, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = \frac{\left[\left(1 - \sum_{i=1}^{N} s_i\right) y\right]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \tag{14}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \left(\theta_i \left[s_i y - (\delta_i + n) k_i\right]\right)$$

gdzie θ_1, θ_2, …, θ_N to mnożniki Lagrange'a hamiltonianu (14). O mnożnikach tych zakłada się, iż są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \in [0;+\infty)$.

Warunki konieczne istnienia maksimum Pontriagina (13) dane są wzorami[5]:

$$\forall_{i=1,2,\ldots,N} \; \frac{\partial H}{\partial s_i} = -y\left[\left(1 - \sum_{j=1}^{N} s_j\right) y\right]^{-\sigma} + \theta_i y = 0 \tag{15a}$$

$$\forall_{i=1,2,\ldots,N} \; -\frac{\partial H}{\partial k_i} + \rho\theta_i = -\frac{\partial y}{\partial k_i}\left[\left(1 - \sum_{j=1}^{N} s_j\right) y\right]^{-\sigma} + \tag{15b}$$
$$-\frac{\partial y}{\partial k_i} \sum_{j=1}^{N} \theta_j s_j + (\rho + \delta_i + n)\theta_i = \dot{\theta}_i$$

$$\forall_{i=1,2,\ldots,N} \; \frac{\partial H}{\partial \theta_i} = s_i y - (\delta_i + n) k_i = \dot{k}_i \tag{15c}$$

oraz warunki transwersalności:

$$\forall_{i=1,2,\ldots,N} \; \lim_{t \to +\infty} \left[\theta_i(t) e^{-\rho t}\right] = 0 \tag{15d}$$

Z równania (15a) wynika, że mnożniki Lagrange'a θ_i (dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$) opisane są przez równania[6]:

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_N = \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{N} s_i\right) y\right]^{-\sigma} \tag{16}$$

które implikują związki:

---

[5] Warunki konieczne (15abc) istnienia rozważanego maksimum Pontriagina oraz związki z nich wynikające muszą być spełnione w każdym momencie $t \in [0;+\infty)$.

[6] Równania $\theta_i y = y\left[\left(1 - \sum_{j=1}^{N} s_j\right) y\right]^{-\sigma}$, wynikające z warunków koniecznych (15a) istnienia maksimum Pontriagina (13), posiadają również rozwiązanie $y = 0$. Ponieważ jednak, na mocy związków (10), $\dot{k}_i / k_i > -(\delta_i + n)$ oraz $k_i(0) > 0$ (dla $i = 1, 2, \ldots, N$), więc w każdym momencie $t \in [0;+\infty)$ $k_1(t)$, $k_2(t)$, …, $k_N(t) > 0$. To zaś, zgodnie z funkcją wydajności pracy (7), implikuje, że dla każdego $t > 0$ $y(t) > 0$, a więc rozwiązania równań (15a) postaci: $y = 0$ są sprzeczne z przytoczonymi tu założeniami i właściwościami rozważanego modelu wzrostu gospodarczego.

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \ldots = \frac{\dot{\theta}_N}{\theta_N} = \sigma\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\dot{s}_i}{1-\sum_{i=1}^{N}s_i} - \frac{\dot{y}}{y}\right)$$

Jeśli dodatkowo przyjmie się upraszczające założenie, że analizowany konsument (spośród wszystkich dostępnych mu struktur ścieżek czasowych stóp inwestycji) wybiera możliwie najprostsze ścieżki stóp inwestycji (tj. wybiera stałe w czasie stopy inwestycji w $K_1, K_2, \ldots, K_N$), to $\dot{s}_1 = \dot{s}_2 = \ldots = \dot{s}_N = 0$. Wówczas powyższe równania stóp wzrostu kolejnych mnożników Lagrange'a można zapisać następująco:

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \ldots = \frac{\dot{\theta}_N}{\theta_N} = -\sigma\frac{\dot{y}}{y} \tag{17}$$

Logarytmują stronami i różniczkując po czasie $t \in [0;+\infty)$ funkcję wydajności pracy (7) dochodzi się do zależności:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \Phi + \sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i\frac{\dot{k}_i}{k_i}\right) \tag{18}$$

która wraz z równaniami (17) prowadzi do związku:

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \ldots = \frac{\dot{\theta}_N}{\theta_N} = -\sigma\left[\Phi + \sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_1\frac{\dot{k}_i}{k_i}\right)\right] \tag{19}$$

Z równań (8), (15b) i (16) wynika, iż:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \frac{\dot{\theta}_i}{\theta_i} = \rho + \delta_i + n - \alpha_i\frac{y}{k_i}$$

co w połączeniu ze związkami (19) implikuje zależności:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \alpha_i\frac{y}{k_i} - \sigma\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j\frac{\dot{k}_j}{k_j}\right) = \rho + \delta_i + n + \sigma\Phi \tag{20}$$

Warunki konieczne (15c) istnienia maksimum Pontriagina (13) prowadzą do związków:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \frac{y}{k_i} = \frac{1}{s_i}\left(\frac{\dot{k}_i}{k_i} + \delta_i + n\right) \tag{21}$$

a stąd oraz z zależności (20) wynika, że:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \frac{\alpha_i(1-\sigma s_i)}{s_i}\frac{\dot{k}_i}{k_i} - \sigma\sum_{j=1;j\neq i}^{N}\left(\alpha_j\frac{\dot{k}_j}{k_j}\right) = \rho + \sigma\Phi + \frac{s_i-\alpha_i}{s_i}(\delta_i+n) \tag{22}$$

Ponieważ (na mocy przyjętych w analizowanym modelu wzrostu gospodarczego założeń) ρ, σ, Φ, α_1, α_2, ..., α_N, δ_1, δ_2, ..., δ_N, s_1, s_2, ..., s_N nie ulegają zmianom w czasie, zatem zależności (22) stanowią liniowy układ równań względem stóp wzrostu $\dot{k}_1/k_1, \dot{k}_2/k_2, \ldots, \dot{k}_N/k_N$. Płynie stąd wniosek, że jeśli układ złożony z równań (22) będzie posiadał rozwiązanie względem wspomnianych stóp wzrostu, to rozważana tu gospodarka charakteryzować się będzie stałymi (w czasie) stopami wzrostu każdego z analizowanych zasobów kapitału.

Układ równań (22) można także zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{s_1} - \sigma\alpha_1 & -\sigma\alpha_2 & \cdots & -\sigma\alpha_N \\ -\sigma\alpha_1 & \frac{\alpha_2}{s_2} - \sigma\alpha_2 & \cdots & -\sigma\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sigma\alpha_1 & -\sigma\alpha_2 & \cdots & \frac{\alpha_N}{s_N} - \sigma\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{k}_1}{k_1} \\ \frac{\dot{k}_2}{k_2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{k}_N}{k_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho + \sigma\Phi + \frac{s_1 - \alpha_1}{s_1}(\delta_1 + n) \\ \rho + \sigma\Phi + \frac{s_2 - \alpha_2}{s_2}(\delta_2 + n) \\ \vdots \\ \rho + \sigma\Phi + \frac{s_N - \alpha_N}{s_N}(\delta_N + n) \end{bmatrix} \quad (23)$$

By układ równań (23) posiadał rozwiązanie potrzeba i wystarcza, by macierz

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{s_1} - \sigma\alpha_1 & -\sigma\alpha_2 & \cdots & -\sigma\alpha_N \\ -\sigma\alpha_1 & \frac{\alpha_2}{s_2} - \sigma\alpha_2 & \cdots & -\sigma\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sigma\alpha_1 & -\sigma\alpha_2 & \cdots & \frac{\alpha_N}{s_N} - \sigma\alpha_N \end{bmatrix}$$

była nieosobliwa. Ponieważ:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{s_1} - \sigma\alpha_1 & -\sigma\alpha_2 & \cdots & -\sigma\alpha_N \\ -\sigma\alpha_1 & \frac{\alpha_2}{s_2} - \sigma\alpha_2 & \cdots & -\sigma\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sigma\alpha_1 & -\sigma\alpha_2 & \cdots & \frac{\alpha_N}{s_N} - \sigma\alpha_N \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{s_i} \begin{vmatrix} 1 - \sigma s_1 & -\sigma s_2 & \cdots & -\sigma s_N \\ -\sigma s_1 & 1 - \sigma s_2 & \cdots & -\sigma s_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sigma s_1 & -\sigma s_2 & \cdots & 1 - \sigma s_N \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{s_i} \begin{vmatrix} 1 - \sigma \sum_{i=1}^{N} s_i & -\sigma s_2 & \cdots & -\sigma s_N \\ 1 - \sigma \sum_{i=1}^{N} s_i & 1 - \sigma s_2 & \cdots & -\sigma s_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 - \sigma \sum_{i=1}^{N} s_i & -\sigma s_2 & \cdots & 1 - \sigma s_N \end{vmatrix} = \left(1 - \sigma \sum_{i=1}^{N} s_i\right) \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{s_i} \begin{vmatrix} 1 & -\sigma s_2 & \cdots & -\sigma s_N \\ 1 & 1 - \sigma s_2 & \cdots & -\sigma s_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\sigma s_2 & \cdots & 1 - \sigma s_N \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1 - \sigma \sum_{i=1}^{N} s_i\right) \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{s_i} \begin{vmatrix} 1 & -\sigma s_2 & \cdots & -\sigma s_N \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left(1 - \sigma \sum_{i=1}^{N} s_i\right) \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{s_i}$$

zatem jeśli $\sum_{i=1}^{N} s_i \neq 1/\sigma$, to $\det(M) \neq 0$ i macierz M jest nieosobliwa. Płynie stąd wniosek, że przy $\sum_{i=1}^{N} s_i \neq 1/\sigma$ analizowana w opracowaniu gospodarka charakteryzuje się stałymi stopami wzrostu każdego z rozważanych w pracy zasobów kapitału na pracującego.

Oznaczając przez $g_1, g_2, \ldots, g_N$ stałe w czasie stopy wzrostu zasobów $k_1, k_2, \ldots, k_N$ (a więc $g_i \equiv \dot{k}_i/k_i$, przy czym $\dot{g}_i = 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$) równania (21) można zapisać następująco:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \frac{y}{k_i} = \frac{g_i + \delta_i + n}{s_i}$$

Logarytmując stronami i różniczkując po czasie t $\in [0;+\infty)$ powyższe zależności uzyskuje się związki:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall} \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{k}_i}{k_i} = 0$$

Stąd zaś oraz z równania (18) wyciągnąć można wniosek, że stopy wzrostu kolejnych zasobów kapitału $\dot{k}_1/k_1, \dot{k}_2/k_2, \ldots, \dot{k}_N/k_N$ są rozwiązaniem układu równań postaci:

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & 1-\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{k}_1/k_1 \\ \dot{k}_2/k_2 \\ \vdots \\ \dot{k}_N/k_N \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Układ równań (24) można rozwiązać stosując metodę wyznaczników Cramera. Kolejne wyznaczniki Cramera owego układu równań dane są wzorami:

$$W = \begin{vmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & 1-\alpha_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ 1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i & 1-\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i & -\alpha_2 & \ldots & 1-\alpha_N \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\right) \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ 1 & 1-\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\alpha_2 & \ldots & 1-\alpha_N \end{vmatrix} = \left(1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\right) \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_N \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

$$W_1 = \Phi \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_N \\ 1 & 1-\alpha_2 & \dots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\alpha_2 & \dots & 1-\alpha_N \end{vmatrix} = \Phi \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_N \\ 0 & 1 & \dots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Phi$$

$$W_2 = \Phi \begin{vmatrix} 1-\alpha_1 & 1 & \dots & -\alpha_N \\ -\alpha_1 & 1 & \dots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_1 & 1 & \dots & 1-\alpha_N \end{vmatrix} = \Phi \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & \dots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Phi \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Phi$$

$$\vdots$$

$$W_N = \Phi \begin{vmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & 1 \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Phi \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Phi$$

skąd wynika, że stopy wzrostu zasobów kapitału na pracującego, spełniające warunki konieczne (15abc) istnienia maksimum Pontriagina (13), opisują związki:

$$\underset{i=1,2,\dots,N}{\forall} g_i \equiv \frac{\dot{k}_i}{k_i} = \frac{W_i}{W} = \frac{\Phi}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} = \frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - 1\right) n}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} \tag{25}$$

Z zależności (25) można wyciągnąć następujące wnioski dotyczące kształtowania się stóp wzrostu kolejnych zasobów kapitałów na pracującego, które spełniają warunki konieczne istnienia stóp inwestycji maksymalizujących całkę preferencji (6) typowego konsumenta:

- Stopy wzrostu każdego z analizowanych w opracowaniu zasobów kapitału są sobie równe.
- Stopy te zależne są od stopy harrodiańskiego postępu technicznego g, stopy wzrostu liczby pracujących n, elastyczności Θ produktu względem nakładów pracy oraz elastyczności $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ funkcji produkcji (1) względem nakładów kolejnych czynników kapitałowych.
- Różniczkując g_i względem stopy postępu technicznego w sensie Harroda okazuje się, że (dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$) zachodzi związek: $\frac{\partial g_i}{\partial g} = \frac{\Theta}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} > 0$, skąd wynika, że im wyższa jest wspomniana stopa postępu technicznego, tym wyższe są stopy wzrostu analizowanych w pracy zasobów kapitału.

- Pochodne cząstkowe $\partial g_i/\partial n$ równe są $\dfrac{\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j - 1}{1 - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j}$ (dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$). Płyną stąd trzy następujące wnioski. Po pierwsze, jeśli makroekonomiczna funkcja produkcji (1) charakteryzuje się malejącymi efektami skali $\left(\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j < 1\right)$, to $\partial g_i/\partial n < 0$ i wysokiej stopie wzrostu liczby pracujących towarzyszą niskie stopy wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego. Po drugie, wówczas gdy $\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j = 1$ (a zatem występują stałe efekty skali) stopy wzrostu owych zasobów są niezależne od stopy wzrostu liczby pracujących. Po trzecie, jeśli mają miejsce rosnące efekty skali $\left(\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j > 1\right)$, to im wyższa jest stopa wzrostu liczby pracujących, tym wyższe są stopy wzrostu $\dot{k}_i/k_i$ (dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$).
- Im wyższa jest elastyczność Θ funkcji produkcji względem liczby pracujących, tym wyższe są stopy wzrostu rozważanych tu zasobów kapitału na pracującego. Wynika to stąd, iż dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ spełniona jest zależność: $\dfrac{\partial g_i}{\partial \Theta} = \dfrac{g + n}{1 - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j} > 0$.
- Licząc pochodną cząstkową g_i po α_j (dla $i, j = 1, 2, \ldots, N$) okazuje się, iż $\dfrac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} = \dfrac{\Theta(g + n)}{\left(1 - \sum_{m=1}^{N}\alpha_m\right)^2} > 0$. Płynie stąd wniosek, że im wyższa jest elastyczność produkcji względem nakładów j-tego zasobu kapitału, tym wyższe są stopy wzrostu każdego z tych zasobów przypadających na jednego pracującego.
- Jeśli występują malejące efekty skali makroekonomicznej funkcji produkcji Cobba-Douglasa (1), to dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ stopa wzrostu i-tego zasobu kapitału na pracującego jest niższa od stopy harrodiańskiego postępu technicznego (a więc od stopy wzrostu zasobów kapitału na pracującego w warunkach długookresowej równowagi neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego typu Solowa, Mankiwa-Romera-Weila i Nonnemana-Vanhoudta). W warunkach stałych efektów skali stopy wzrostu g_i równe są stopie postępu technicznego w sensie Harroda. Jeśli zaś w gospodarce występują rosnące efekty skali, to stopy wzrostu analizowanych w pracy zasobów kapitału na pracującego są wyższe od g.

Z równań (18) i (25) wynika, że stopa wzrostu wydajności pracy $\dot{y}/y$ w każdym momencie $t \in [0;+\infty)$ dana jest wzorem:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - 1\right)n}{1 - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i} \tag{26}$$

Ponieważ stopa wzrostu produktu na pracującego w równaniu (26) pokrywa się ze stopami wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego w równaniu (25), zatem wnioski płynące z równania (26) są analogiczne do implikacji równania (25).

Natomiast z równań (17) i (26) wyciągnąć można wniosek, iż stopy wzrostu każdego z mnożników Lagrange'a θ_i opisuje związek:

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \ldots = \frac{\dot{\theta}_N}{\theta_N} = -\sigma\frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - 1\right)n}{1 - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i}$$

który, po scałkowaniu stronami względem czasu $t \in [0;+\infty)$, implikuje zależności:

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \ldots = \theta_N(t) = \hat{\theta}\exp\left[-\sigma\frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{i=1}^{N}\alpha_1 - 1\right)n}{1 - \sum_{i=1}^{N}\alpha_1}t\right] \tag{27}$$

gdzie $\hat{\theta} > 0$ jest wartością każdego z mnożników Lagrange'a w momencie $t = 0$[7]. Z równania (27) wynika, że:

$$\underset{i=1,2,\ldots,N}{\forall}\ \theta_i(t)e^{-\rho t} = \hat{\theta}\exp\left[-\left\{\sigma\frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j - 1\right)n}{1 - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j} + \rho\right\}t\right]$$

co z kolei prowadzi do wniosku, iż warunki transwersalności (15d) będą spełnione wtedy, i tylko wtedy, gdy zachodzić będzie nierówność:

[7] To, iż $\hat{\theta} > 0$ wynika stąd, że z równania (16) oraz przyjętych uprzednio założeń płynie wniosek, że w każdym momencie $t \in [0;+\infty)$ zachodzi: $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_N = \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{N}s_i\right)y\right]^{-\sigma} > 0$, co implikuje, że w momencie $t = 0$ spełniony jest związek: $\hat{\theta} = \theta_1(0) = \theta_2(0) = \ldots = \theta_N(0) > 0$.

$$\sigma \frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - 1\right) n}{1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_1} + \rho > 0 \tag{28}$$

Analizując nierówność (28) okazuje się, iż:

- Jeśli występują niemalejące efekty skali makroekonomicznej funkcji produkcji (a zatem wówczas, gdy $\Xi = \Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \geq 1$), to nierówność ta jest spełniona przy dowolnej dodatniej stopie dyskontowej ρ.
- Natomiast w warunkach malejących efektów skali $\left(\Xi = \Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i < 1\right)$ nierówność (28) i warunki transwersalności (15d) spełnione są wówczas, gdy stopa dyskontowa typowego konsumenta ρ jest wyższa od wielkości $\sigma \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \Theta\right) n - \Theta g}{1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i}$[8].

Z równania (22) wynika, iż stopy inwestycji, które spełniają warunki konieczne (15abc) istnienie maksimum Pontriagina (13), dane są wzorami:

$$\forall_{i = 1,2,\ldots,N} \; s_i = \frac{\alpha_i \left(\frac{\dot{k}_i}{k_i} + n\right)}{\rho + \delta_i + \sigma\left(\Phi + \sum_{j=1}^{N} \left[\alpha_j \frac{\dot{k}_j}{k_j}\right]\right)}$$

Stąd zaś oraz z równań (25) płynie wniosek, że rozważane tu stopy inwestycji opisane są przez następujące związki[9]:

---

[8] Warto tu jednak zauważyć, iż nawet przy $\Xi = \Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i < 1$ może mieć miejsce przypadek, w którym stopa wzrostu liczby pracujących n jest niższa od $\frac{\Theta g}{1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \Theta}$ i wówczas zarówno nierówność (28), jak i warunki transwersalności (15d) spełnione są przy każdej stopie dyskontowej $\rho > 0$.

[9] By stopy inwestycji s_i dane równaniem (29) były akceptowalne ekonomicznie zarówno każda z nich, jak i ich suma muszą należeć do przedziału (0;1).

$$\forall_{i=1,2,\ldots,N}\; s_i = \frac{\alpha_i\left(\dfrac{\Phi}{1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j}+n\right)}{\rho+\delta_i+\sigma\dfrac{\Phi}{1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j}} = \tag{29}$$

$$= \frac{\alpha_i\Theta(g+n)}{(\rho+\delta_i)\left(1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\right)+\sigma\left[\Theta g+\left(\Theta+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j-1\right)n\right]}$$

Z zależności (29) wyciągnąć można następujące wnioski dotyczące kształtowania się stóp inwestycji spełniających warunki konieczne istnienia maksimum całki preferencji typowego konsumenta w analizowanym tu modelu wzrostu gospodarczego:

- Stopy te zależne są m.in. od preferencji typowego konsumenta, co do alokacji konsumpcji w czasie, które opisane są przez stopę dyskontową ρ oraz odwrotności międzyokresowej substytucji konsumpcji σ owego konsumenta.
- Różniczkując równania (29) po stopie dyskontowej typowego konsumenta ρ okazuje się, iż dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ zachodzą związki:
$$\frac{\partial s_i}{\partial \rho} = \frac{-\left(1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\right)\alpha_i\Theta(g+n)}{\left((\rho+\delta_i)\left(1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\right)+\sigma\left[\Theta g+\left(\Theta+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j-1\right)n\right]\right)^2} < 0.$$ Płynie stąd wniosek, że im wyższa jest stopa dyskontowa owego konsumenta, tym niższe są stopy inwestycji wyróżnione w analizowanym tu modelu wzrostu gospodarczego zasoby kapitału.
- Pochodne cząstkowe s_i po σ (dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$) dane są wzorem:
$$\frac{\partial s_i}{\partial \sigma} = \frac{-\alpha_i\Theta(g+n)\left[\Theta g+\left(\Theta+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j-1\right)n\right]}{\left((\rho+\delta_i)\left(1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\right)+\sigma\left[\Theta g+\left(\Theta+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j-1\right)n\right]\right)^2}.$$ Stąd zaś wynika, że jeśli elastyczność Θ produkcji względem nakładów pracy będzie mniejsza (większa) od $\dfrac{\left(1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\right)n}{g+n}$, to pochodne $\partial s_i/\partial\sigma$ (dla $i = 1, 2, \ldots, N$) będą dodatnie (ujemne) i im wyższa będzie odwrotność międzyokresowej substytucji konsumpcji σ, tym wyższe (niższe) będą kolejne, rozważane

w opracowaniu stopy inwestycji. Natomiast jeśli $\Theta = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right) n}{g + n}$, to dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ zachodzi zależność: $\partial s_i / \partial \sigma = 0$ i stopy inwestycji s_i są niezależne od σ.

Podsumowanie i wnioski

Prowadzone w pracy rozważania można podsumować następująco:

- W prezentowanym w pracy modelu wzrostu gospodarczego szuka się takiej struktury inwestycji w N zasobów kapitału, która maksymalizuje sumę zdyskontowanej użyteczności typowego konsumenta w gospodarce przy ograniczeniach równaniami przyrostów kolejnych zasobów kapitału.
- Z prowadzonych w pracy analiz wynika, iż istnieje struktura stóp inwestycji, która spełnia warunki konieczne maksimum sumy zdyskontowanej użyteczności konsumpcji typowego konsumenta. Co więcej, stopy inwestycji spełniające warunki konieczne maksymalizacji całki preferencji owego konsumenta zależne są m.in. od stopy dyskontowej typowego konsumenta oraz od odwrotności międzyokresowej substytucji konsumpcji. Im wyższa jest stopa dyskontowa typowego konsumenta, tym niższe są stopy inwestycji w każdy z analizowanych w pracy zasobów kapitału. Natomiast oddziaływanie odwrotności międzyokresowej substytucji konsumpcji na optymalne stopy inwestycji w rozważanym w pracy modelu wzrostu gospodarczego zależne jest od relacji elastyczności produkcji względem nakładów pracy w stosunku do elastyczności produkcji względem nakładów kapitału, stopy harrodiańskiego postępu technicznego oraz stopy wzrostu liczby pracujących. Jeśli elastyczność produkcji względem nakładów pracy będzie względnie niska (wysoka) w stosunku do pozostałych wspomnianych tu zmiennych makroekonomicznych, to wysokiej odwrotności międzyokresowej substytucji konsumpcji towarzyszyć będą wysokie stopy inwestycji z każdy z zasobów kapitału.
- Stopy wzrostu gospodarczego w rozważanym w pracy modelu wzrostu gospodarczego są, w przeciwieństwie do modeli wzrostu endogenicznego Lucasa i Romera, niezależne od preferencji typowego konsumenta, co do struktury konsumpcji w czasie (preferencje te opisane są w modelu przez stopę dyskontową i odwrotność międzyokresowej substytucji konsumpcji). Stopy te zależne są zaś od stopy egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda, stopy wzrostu liczby pracujących oraz rodzaju efektów skali makroekonomicznej funkcji produkcji. Im wyższa jest stopa harrodiańskiego postępu technicznego, tym wyższe są stopy wzrostu wydajności pracy i kolejnych zasobów kapitału na pracującego (wniosek ten jest analogiczny do wniosków płynących z neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego). Natomiast oddziaływanie stopy wzrostu liczby pracujących na wspomniane uprzednio stopy wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych zależne jest od rodzaju efektów skali funkcji produkcji. W warunkach stałych efektów

skali (podobnie jak w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego) stopa wzrostu liczby pracujących nie oddziałuje na stopy wzrostu wydajności pracy oraz kapitału na pracującego. Natomiast w warunkach malejących (rosnących) efektów skali wysoka stopa wzrostu liczby pracujących jest czynnikiem przyspieszającym (opóźniającym) tempo wzrostu gospodarczego.

Bibliografia

Barro R.J., Sala-i-Martin X., [1995], *Economic Growth*, McGraw-Hill Inc., New York etc.

Blaug M., [1994], *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Becker G.S., [1990], *Ekonomiczna teoria zachowań ludzkich*, seria *Ekonomia XX wieku*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Chiang A.C., [1992], *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill International Editions, New York etc.

Lucas R.E., [July 1988], *On the Mechanics of Economics Development*, „Journal of Monetary Economics".

Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N., [May 1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics".

Mayer T., [1996], *Prawda kontra precyzja w ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Nonneman W., Vanhoudt P., [August 1996], *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries*, „Quarterly Journal of Economics".

Panek E., [1986], *Optymalne trajektorie wzrostu w zagregowanych modelach ekonomicznych*, Zeszyty Naukowe AE w Poznaniu, seria II, zeszyt 82, Poznań.

Panek E. [2000] *Ekonomia matematyczna*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.

Ramsey F., [December 1928] *A Mathematical Theory of Saving*, „The Economic Journal".

Romer P.M., [October 1986], *Increasing Returns and Long-Run Growth*, „Journal of Political Economy".

Romer P.M., [October 1990], *Endogenous Technological Change*, „Journal of Political Economy".

Snowdon B., Vane H., Wynarczyk P., [1998], *Współczesne nurty współczesnej makroekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Solow R.M., [February 1956], *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics".

Solow R.M., [1998], *Czy istnieją powszechnie akceptowalne podstawowe zasady stosowanej makroekonomii*, „Gospodarka Narodowa" nr 4.

Tokarski T., [1996], *Postęp techniczny a wzrost gospodarczy (analiza oparta na R.M. Solowa)*, „Studia Prawno-Ekonomiczne", tom LIII.

Tokarski T., [2000], *Optymalne stopy inwestycji w modelu Mankiwa-Romera-Weila*, „Ekonomista" nr 3.

Tokarski T., [2003], *Specyfikacja funkcji produkcji a równowaga długookresowego wzrostu gospodarczego*, „Ekonomista" nr 3.

Tokarski T., [2005], *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

OPTIMAL INVESTMENT RATES IN AN N-CAPITAL GROWTH MODEL

Summary

The paper aims to determine an optimal structure of investment rates under an N-capital growth model. This model is a combination and expansion of models developed by Solow [1956]; Mankiw, Romer, Weil [1992]; Nonneman, Vanhoudt [1996]; and Tokarski [1996; 2000; 2003; 2005], with elements of optimal control models by Ramsey [1928], Lucas [1988] and Romer [1986, 1990].

The economic growth model described in the paper is based on the following assumptions:

– The stream of products generated in the economy is influenced by a finite N amount of capital, labor and technology resources; it is also assumed that labor and technology resources grow according to certain exogenous growth rates;

– The increase of each of the analyzed capital stocks is the difference between investment in this capital and its depreciation; these assumptions refer to the neoclassical growth models developed by Solow, Mankiw-Romer-Weil, and Nonneman-Vanhoudt;

– A typical rationally behaving consumer (much as in the case of endogenous growth models developed by Lucas and Romer) seeks a long-term investment rate structure that will maximize the usefulness of consumption in an infinite period of time;

– Additionally, an assumption is made that the macroeconomic production function in the described growth model does not have to be characterized by a constant scale effect (as earlier noted by Tokarski [1996, 2003 or 2005]).

The model described by the author is solved using Pontryagin's maximum principle.

Keywords: investment rates, growth model, Pontryagin's maximum principle