Paweł DYKAS*
Anna SULIMA*
Tomasz TOKARSKI*

Złote reguły akumulacji w *N*-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego

Wprowadzenie[1]

Celem prezentowanego opracowania jest próba wyznaczenia złotych reguł akumulacji kapitału Phelpsa [1961] na gruncie *N*-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego. Analizy te prowadzone są przy makroekonomicznej funkcji produkcji jednorodnej dowolnego stopnia $\Xi > 0$. Oznacza to, iż przy $\Xi = 1$ rozważana w opracowaniu makroekonomiczna funkcja produkcji charakteryzuje się stałymi efektami skali (jak ma to miejsce w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego typu Solowa [1956], Mankiwa, Romera, Weila [1992] lub Nonnemana, Vanhoudta [1996]), zaś przy $\Xi < 1$ ($\Xi > 1$) występują malejące (rosnące) efekty skali procesu produkcyjnego. Oznacza to, iż wówczas w gospodarce dowolne, ζ-krotne, przy $\zeta > 1$, zwiększenie nakładów wszystkich czynników produkcji prowadzi do mniej (więcej) niż ζ-krotnego wzrostu strumienia wytworzonego produktu (szerzej na ten temat por. Tokarski [2008]).

Struktura prezentowanego opracowania przedstawia się następująco. Na początku scharakteryzowane są założenia analizowanego w pracy modelu *N*-kapitałowego wzrostu gospodarczego. Znajduje się tu również dowód tego, iż rozważany w pracy model wzrostu charakteryzuje się asymptotyczną stabilnością w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego układu równań ruchu analizowanego modelu wzrostu gospodarczego. Następnie rozważanie są kwestie dotyczące położenia długookresowych ścieżek wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych występujących w rozważanym modelu wzrostu gospodarczego w warunkach długookresowej równowagi owego modelu wzrostu, oraz wyznaczone są złote reguły akumulacji kapitału na gruncie *N*-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego w warunkach występowania efektów skali procesu produkcyjnego. Opracowanie kończy podsumowanie prowadzonych w pracy rozważań i ważniejsze wynikające z nich wnioski.

---

* P. Dykas i A. Sulima są studentami ekonomii i matematyki a T. Tokarski – pracownikiem Instytutu Ekonomii i Zarządzania Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz Wyższej Szkoły Handlowej im. B. Markowskiego w Kielcach, Wydział Zamiejscowy w Tarnobrzegu. Artykuł wpłynął do redakcji we wrześniu 2008 r.

1 Autorzy pragną podziękować dwóm anonimowym recenzentom oraz Redaktorowi dr. Tadeuszowi Smudze z *Gospodarki Narodowej* za uwagi do wstępnej wersji prezentowanego opracowania.

Założenia i równowaga modelu[2]

W prowadzonych dalej rozważaniach przyjmowane będą następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki:

1. Proces produkcyjny opisany jest przez rozszerzoną funkcję produkcji Cobba-Douglasa daną wzorem[3]:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad Y(t) = \prod_{j=1}^{N} \left(K_j(t)\right)^{\alpha_j} \cdot (E(t))^{\Theta} \tag{1}$$

gdzie Y jest strumieniem wytworzonego w gospodarce produktu; N to liczba wykorzystanych w procesie produkcyjnym zasobów kapitału; K_j-nakłady j-tego rodzaju kapitału (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$); E-nakłady efektywnej pracy (będące iloczynem zasobu wiedzy A, którego przyrost ma charakter egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda[4], i liczby pracujących L); α_j to elastyczności wytworzonego produktu względem nakładów j-tego rodzaju kapitału (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$), zaś Θ jest elastycznością produkcji względem nakładów efektywnej pracy. Zakłada się również, że dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$ $\alpha_j \in (0;1)$, $\Theta \in (0;1)$ oraz $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \in (0;1)$.

Kolejne nakłady kapitału $K_1, K_2, \ldots, K_N$ w analizowanym modelu wzrostu gospodarczego można utożsamiać z różnymi, substytucyjnymi w stosunku do siebie, rodzajami kapitału rzeczowego, różnymi rodzajami kapitału ludzkiego (wynikającego z istnienia w każdej gospodarce grup pracujących o różnym poziomie kwalifikacji) oraz z różnymi zasobami wiedzy naukowej-technicznej wykorzystywanymi w procesie produkcyjnym.

Korzystając z twierdzenia Eulera o funkcji jednorodnej można pokazać, że funkcja produkcji (1) jest jednorodna stopnia $\Xi = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j + \Theta$ względem kolejnych nakładów kapitału $K_1, K_2, \ldots, K_N$ i jednostek efektywnej pracy E.

---

2 Prezentowany tu model wzrostu gospodarczego jest rozszerzeniem modelu rozważanego w pracy Nonnemana, Vanhoudta [1996] oraz w rozdziale 2 książki Tokarskiego [2008]. Alternatywny model N-kapitałowego wzrostu gospodarczego, oparty na zasadzie maksimum Pontriagina, przedstawiony jest w artykule Tokarskiego [2007]. Model ten nawiązuje również do modelu zaproponowanego w pracy Tokarskiego [2001, punkt 1.4] oraz do ekonometrycznych modeli wzrostu gospodarki polskiej, których konstrukcja i oszacowania parametrów scharakteryzowanego są w monografiach Welfe [2001, 2007].

3 O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych *implicite* przyjmowane jest dalej założenie, że są różniczkowalne względem czasu $t \in [0; +\infty)$. Zapis $\dot{x}(t) \equiv \dot{x} \equiv dx/dt$ oznaczał będzie pochodną zmiennej x po czasie t, czyli ekonomicznie rzecz biorąc, przyrost wartości owej zmiennej w momencie $t \in [0; +\infty)$.

4 Przez postęp techniczny w sensie Harroda rozumie się ten rodzaj postępu technicznego, który bezpośrednio potęguje produktywność nakładów pracy L. Egzogeniczny postęp techniczny w analizowanej tu gospodarce może być efektem nauki przez doświadczenie (*learning by doing*).

Oznacza to, że jeśli wyrażenie $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j + \Theta$ jest większe (mniejsze) od jedności, to rozszerzona funkcja produkcji Cobba-Douglasa charakteryzuje się rosnącymi (malejącymi) efektami skali, zaś przy $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j + \Theta = 1$ występują stałe efekty skali procesu produkcyjnego. Co więcej, przy $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j + \Theta = 1$ analizowany tu model wzrostu gospodarczego sprowadza się do neoklasycznego modelu wzrostu Nonnemana, Vanhoudta [1996].

2. Przyrosty każdego z zasobów kapitału $\dot{K}_j$ stanowią różnicę pomiędzy inwestycjami s_jY w owe zasoby a ich deprecjacją δ_jK_j, czyli:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \dot{K}_j(t) = s_jY(t) - \delta_jK_j(t) \tag{2}$$

gdzie s_j (dla każdego j = 1, 2, ..., N) to stopa inwestycji w j-ty zasób kapitału, zaś δ_j jest stopą deprecjacji owego zasobu. O stopach s_j oraz δ_j zakłada się, że $\forall j = 1,2,\ldots,N \quad s_j,\delta_j \in (0;1)$ oraz $\sum_{j=1}^{N}s_j \in (0;1)$ i mają one charakter zmiennych egzogenicznych.

3. Jednostki efektywnej pracy E rosną według egzogenicznej stopy $\mu > 0$, która jest sumą stopy egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda (równej $g > 0$) oraz stopy wzrostu liczny pracujących ($n > 0$). Dlatego też:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad \dot{E}(t)/E(t) = \mu = g + n \tag{3}$$

Z równań (1) i (2) wynika, że przyrost każdego z zasobów kapitału można zapisać wzorem:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \dot{K}_j(t) = s_j\prod_{m=1}^{N}\left(K_m(t)\right)^{\alpha_m}\left(E(t)\right)^{\Theta} - \delta_jK_j(t)$$

a stąd:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \dot{K}_j(t) + \delta_jK_j(t) = s_j\prod_{m=1}^{N}\left(K_m(t)\right)^{\alpha_m}\left(E(t)\right)^{\Theta}$$

lub:

$$\begin{gathered}\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \\ G_j(t) + \delta_j = s_j\left(K_j(t)\right)^{\alpha_j - 1}\prod_{m=1, m\neq j}^{N}\left(K_m(t)\right)^{\alpha_m}\left(E(t)\right)^{\Theta}\end{gathered} \tag{4}$$

gdzie $G_j \equiv \dot{K}_j / K_j$ to stopa wzrostu j-tego zasobu kapitału (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$). Ponieważ przy $K_1, K_2, \ldots, K_N, E > 0$ prawe strony równań (4) są dodatnie, zatem $\forall t \in [0; +\infty) \forall j = 1,2,\ldots,N : G_j(t) > -\delta_j$. Płynie stąd wniosek, że przestrzeń fazową $P \subset \Re^N$ analizowanego układu równań różniczkowych można zdefiniować następująco: $P = \{(G_1, G_2, \ldots, G_N) \in \Re^N : \forall i = 1,2,\ldots,N \quad G_i > -\delta_i\}$. Logarytmując stronami i różniczkując względem czasu $t \in [0; +\infty)$ powyższe równania uzyskuje się związki:

$$\forall t \in [0; +\infty) \forall j = 1,2,\ldots,N \quad \frac{\dot{G}_j(t)}{G_j(t) + \delta_j} = -(1 - \alpha_j)\frac{\dot{K}_j(t)}{K_j(t)} +$$
$$+ \sum_{m=1, m \neq j}^{N} \left(\alpha_m \frac{\dot{K}_m(t)}{K_m(t)}\right) + \Theta \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} = -(1 - \alpha_j)G_j(t) + \sum_{m=1, m \neq j}^{N} (\alpha_m G_m(t)) + \Theta \frac{\dot{E}(t)}{E(t)}$$

lub po uwzględnieniu zależności (3):

$$\begin{gathered} \forall t \in [0; +\infty) \forall j = 1,2,\ldots,N \quad \frac{\dot{G}_j(t)}{G_j(t) + \delta_j} = \\ = \Theta\mu - (1 - \alpha_j)G_j(t) + \sum_{m=1, m \neq j}^{N} (\alpha_m G_m(t)) \end{gathered} \tag{5}$$

Układ złożony z równań różniczkowych (5) stanowi układ równań ruchu w analizowanym tu modelu wzrostu gospodarczego. Układ ów posiada punkt stacjonarny $(G_1^*, G_2^*, \ldots, G_N^*) \in P$ przy $\dot{G}_1 = \dot{G}_2 = \ldots = \dot{G}_N = 0$. Punkt stacjonarny $(G_1^*, G_2^*, \ldots, G_N^*) \in P$ jest rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_N \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \cdots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & 1-\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_N \end{bmatrix} = \Theta\mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Układ równań (6) można rozwiązać wykorzystując np. twierdzenie Cramera. Kolejne wyznaczniki Cramera owego układu równań dane są wzorami:

$$W = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_N \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \cdots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & 1-\alpha_N \end{bmatrix} = 1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j > 0 \tag{7}$$

oraz:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad W_j = \tag{8}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{j-1} & \Theta\mu & -\alpha_{j+1} & \cdots & -\alpha_N \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{j-1} & \Theta\mu & -\alpha_{j+1} & \cdots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & 1-\alpha_{j-1} & \Theta\mu & -\alpha_{j+1} & \cdots & -\alpha_N \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{j-1} & \Theta\mu & -\alpha_{j+1} & \cdots & -\alpha_N \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{j-1} & \Theta\mu & 1-\alpha_{j+1} & \cdots & -\alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{j-1} & \Theta\mu & -\alpha_{j+1} & \cdots & 1-\alpha_N \end{vmatrix} = \Theta\mu > 0$$

Z równań (7-8) płynie wniosek, że stopy wzrostu *j*-tego zasobu kapitału (dla $j = 1, 2, \ldots, N$) w punkcie stacjonarnym układu równań różniczkowych (5) można zapisać następująco:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad G_j^* = \frac{W_j}{W} = \frac{\Theta\mu}{-1\sum\limits_{m=1}^{N}\alpha_m} \tag{9}$$

Dokonując podstawienia Riccatiego postaci (por. np. [Krysicki, Włodarski, 1993, s. 264-265]):

$$\forall t \in [0; +\infty) \forall j = 1,2,\ldots,N \quad G_j(t) + \delta_j = \frac{1}{v_j(t)} \tag{10a}$$

a stąd:

$$\forall t \in [0; +\infty) \forall j = 1,2,\ldots,N \quad \dot{G}_j(t) = -\frac{\dot{v}_j(t)}{\left(v_j(t)\right)^2} \tag{10b}$$

układ równań różniczkowych (5) można zapisać następująco:

$$\forall t \in [0; +\infty) \forall j = 1,2,\ldots,N$$

$$\dot{v}_j(t) = \left(1-\alpha_j\right) - \left[\psi_j + \sum_{m=1, m\neq j}^{N}\left(\alpha_m\left(\frac{1}{v_m(t)} - \delta_m\right)\right)\right]v_j(t) \tag{11}$$

gdzie:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \psi_j = \Theta\mu + \left(1-\alpha_j\right)\delta_j \tag{12}$$

Ponieważ układ równań różniczkowych (11) jest tożsamościowy do układu (5), zatem punkt stacjonarny owego układu równań $\left(v_1^*, v_2^*, \ldots, v_N^*\right)$, zgodnie z równaniami (9) i (10a), określają związki:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad v_j^* = \frac{1}{G_j^* + \delta} = \frac{1}{\dfrac{\Theta\mu}{1 - \sum\limits_{m=1}^{N}\alpha_m} + \delta_j} = \frac{1}{G^* + \delta_j} \tag{13}$$

Układ równań różniczkowych (11) można również zapisać następująco:

$$\begin{aligned}\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \dot{v}_j(t) &= f_j\big(v_1(t), v_2(t),\ldots,v_N(t)\big) = \\ &= \big(1-\alpha_j\big) - \left[\psi_j + \sum_{m=1, m\neq j}^{N}\left(\alpha_m\left(\frac{1}{v_m} - \delta_m\right)\right)\right] v_j(t)\end{aligned} \tag{14}$$

Różniczkując funkcje f_j (z równań (14)) względem v_j oraz v_m okazuje się, że:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \frac{\partial f_j}{\partial v_j} = -\psi_j - \sum_{m=1, m\neq j}^{N}\left(\alpha_m\left(\frac{1}{v_m} - \delta_m\right)\right) \tag{15a}$$

i:

$$\forall j,m = 1,2,\ldots,N, m \neq j \quad \frac{\partial f_j}{\partial v_m} = \alpha_m \frac{v_j}{v_m^2} \tag{15b}$$

Z równań (15ab) wynika, że macierz Jacobiego układu równań (14) w punkcie stacjonarnym $\big(v_1^*, v_2^*,\ldots,v_N^*\big)$, po uwzględnieniu związku (13), dana jest wzorem:

$$J\big(v_1^*, v_2^*,\ldots,v_N^*\big) = \\ = \begin{bmatrix} -\psi_1 - G^*\sum\limits_{j=2}^{N}\alpha_j & \alpha_2\dfrac{(G^*+\delta_2)^2}{G^*+\delta_1} & \cdots & \alpha_N\dfrac{(G^*+\delta_N)^2}{G^*+\delta_1} \\ \alpha_1\dfrac{(G^*+\delta_1)^2}{G^*+\delta_2} & -\psi_2 - G^*\sum\limits_{j=1, j\neq 2}^{N}\alpha_j & \cdots & \alpha_N\dfrac{(G^*+\delta_N)^2}{G^*+\delta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1\dfrac{(G^*+\delta_1)^2}{G^*+\delta_N} & \alpha_2\dfrac{(G^*+\delta_2)^2}{G^*+\delta_N} & \cdots & -\psi_N - G^*\sum\limits_{j=1}^{N-1}\alpha_j \end{bmatrix} \tag{16}$$

Z twierdzenia Grobmana–Hartmana wynika, że punkt stacjonarny $\big(G_1^*, G_2^*,\ldots,G_N^*\big) \in P$ analizowanego tu układu równań różniczkowych charakteryzował się będzie asymptotyczną stabilnością wtedy, i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu zlinearyzowany układ równań będzie asymptotycznie stabilny, tzn. gdy część rzeczywista (*Re* λ) każdej z wartości własnych λ macierzy Jacobiego (16) będzie ujemna (za [Ombach, 1999, s. 219-221]). Wartości własne λ są zaś rozwiązaniami następującego równania:

$$|\tilde{J}| = \left| J\big(v_1^*, v_2^*,\ldots,v_N^*\big) - \lambda I_N \right| = 0 \tag{17}$$

gdzie I_N jest macierzą jednostkową o wymiarach $N \times N$. Wyznacznik $|\tilde{J}|$, zgodnie z równaniami (16-17), można zapisać następująco:

$$|\tilde{J}| = \begin{bmatrix} -\psi_1 - \lambda - G^* \sum_{j=2}^{N} \alpha_j & \alpha_2 \frac{(G^* + \delta_2)^2}{G^* + \delta_1} & \dots & \alpha_N \frac{(G^* + \delta_N)^2}{G^* + \delta_1} \\ \alpha_1 \frac{(G^* + \delta_1)^2}{G^* + \delta_2} & -\psi_2 - \lambda - G^* \sum_{j=1, j \neq 2}^{N} \alpha_j & \dots & \alpha_N \frac{(G^* + \delta_N)^2}{G^* + \delta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 \frac{(G^* + \delta_1)^2}{G^* + \delta_N} & \alpha_2 \frac{(G^* + \delta_2)^2}{G^* + \delta_N} & \dots & -\psi_N - \lambda - G^* \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \end{bmatrix}$$

a stąd:

$$|\tilde{J}| = \prod_{j=1}^{N} \left(\alpha_j (G^* + \delta_j)^2\right) \cdot \begin{vmatrix} -\gamma_1 & v_1^* & \dots & v_1^* \\ v_2^* & -\gamma_2 & \dots & v_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_N^* & v_N^* & \dots & -\gamma_N \end{vmatrix} \tag{18}$$

gdzie:

$$\forall j = 1, 2, \dots, N \quad \gamma_j = \frac{\psi_j + \lambda + G^* \sum_{m=1, m \neq j}^{N} \alpha_m}{\alpha_j (G^* + \delta_j)^2} \tag{19}$$

Związek (18) zapisać można również wzorem:

$$\begin{aligned} |\tilde{J}| &= \prod_{j=1}^{N} \left(\alpha_j (G^* + \delta_j)^2 v_j^*\right) \cdot \begin{vmatrix} -\frac{\gamma_1}{v_1^*} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\frac{\gamma_2}{v_2^*} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -\frac{\gamma_N}{v_N^*} \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{j=1}^{N} \left(\alpha_j (G^* + \delta_j)^2 v_j^*\right) \cdot \begin{vmatrix} -\phi_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\phi_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -\phi_N \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

gdzie:

$$\forall j = 1, 2, \dots, N \quad \phi_j = \frac{\gamma_j}{v_j^*} > 0 \tag{21}$$

Uwzględniając to, że $G^* + \delta_j = \frac{1}{v_j^*}$ (dla każdego $j = 1, 2, ..., N$) wyznacznik (20) sprowadza się do zależności:

$$|\tilde{J}| = \prod_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{v_j^*} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} (\phi_j + 1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\phi_N + 1}{\phi_1 + 1} & \frac{\phi_N + 1}{\phi_2 + 1} & \dots & -(\phi_N + 1)\left(1 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\phi_N + 1}{\phi_j + 1}\right) \end{vmatrix}$$

czyli:

$$|\tilde{J}| = (-1)^N \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{v_j^*} \cdot \prod_{j=1}^{N} (\phi_j + 1) \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\phi_j + 1}\right) \tag{22}$$

Ponieważ $(-1)^N \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{v_j^*} = (-1)^N \cdot \prod_{j=1}^{N} \left(\alpha_j \left(G^* + \delta_j\right)\right) \neq 0$, zatem wyznacznik (22) równy będzie 0 wtedy, i tylko wtedy, gdy:

$$\prod_{j=1}^{N} (\phi_j + 1) \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\phi_j + 1}\right) = 0.$$

Płynie stąd wniosek, że wartości własne λ macierzy Jacobiego (17) są rozwiązaniami następujących równań:

$$\exists j = 1,2,\dots,N \quad \phi_j + 1 = 0 \tag{23}$$

oraz:

$$1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\phi_j + 1} = 0 \tag{24}$$

Ze związków (21) wynika, że równania (23) spełnione będą wtedy, i tylko wtedy, gdy:

$$\exists j = 1,2,\dots,N \quad \frac{\gamma_j + v_j^*}{v_j^*} = 0$$

a stąd:

$$\exists j = 1,2,\dots,N \quad \gamma_j + v_j^* = 0$$

czyli (po uwzględnieniu podstawień (13) oraz (19)):

$$\exists j = 1,2,\dots,N \quad \frac{\psi_j + \lambda + G^* \sum_{m=1, m\neq j}^{N} \alpha_m}{\alpha_j \left(G^* + \delta_j\right)^2} + \frac{1}{G^* + \delta_j} =$$

$$= \frac{\psi_j + \lambda + G^* \sum_{m=1, m\neq j}^{N} \alpha_m + \alpha_j \left(G^* + \delta_j\right)}{\alpha_j \left(G^* + \delta_j\right)^2} = 0$$

co implikuje:

$$\exists j = 1,2,\dots,N \quad \lambda = -\left(\psi_j + G^* \sum_{m=1, m\neq j}^{N} \alpha_m + \alpha_j \left(G^* + \delta_j\right)\right) < 0. \qquad (25)$$

Ze związku (25) wynika, że wartości własne analizowanej macierzy Jacobiego, które spełniają równania (23), są ujemne.

Ponieważ $\forall j = 1,2,\dots,N \quad \phi_j = \frac{\gamma_j}{v_j^*}$, zatem równanie (24) można również zapisać następująco:

$$1 - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{\frac{\gamma_j}{v_j^*} + 1} \right) = 0$$

a stąd oraz z równań (13), (19) i (12) wynika, że:

$$1 - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\alpha_j \left(G^* + \delta_j\right)}{\psi_j + \lambda + G^* \sum_{m=1}^{N} \alpha_m + \alpha_j \delta_j} \right) =$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\alpha_j \left(G^* + \delta_j\right)}{\Theta\mu + \left(1 - \alpha_j\right)\delta_j + \lambda + G^* \sum_{m=1}^{N} \alpha_m + \alpha_j \delta_j} \right) = 0$$

co, wraz z tym, że $G^* = \frac{\Theta\mu}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j}$ oraz $G^* + \delta_j = \frac{1}{v_j^*}$ (dla $j = 1, 2, \dots, N$), implikuje równanie:

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\alpha_j \left(G^* + \delta_j\right)}{G^* + \delta_j + \lambda} \right) = 1. \qquad (26)$$

Ponieważ λ jest liczbą zespoloną, więc można ją zapisać jako $\lambda = a + bi$, gdzie $i = \sqrt{-1}$, zaś $a, b \in \Re$. Wówczas równanie (26) wygląda następująco:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)}{G^* + \delta_j + a + bi}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)\frac{1}{G^* + \delta_j + a + bi}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)\frac{G^* + \delta_j + a}{\left(G^* + \delta_j + a\right)^2 + b^2}\right) - \sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)\frac{bi}{\left(G^* + \delta_j + a\right)^2 + b^2}\right) = 1$$

z czego wynika, że:

$$-\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)\frac{bi}{\left(G^* + \delta_j + a\right)^2 + b^2}\right) = -b\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)\frac{i}{\left(G^* + \delta_j + a\right)^2 + b^2}\right) = 0$$

ale:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)\frac{i}{\left(G^* + \delta_j + a\right)^2 + b^2}\right) > 0$$

więc $b = 0$. Oznacza to, że wszystkie wartości własne λ są rzeczywiste. Równanie (26) możemy więc zapisać następująco:

$$1 - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)}{G^* + \delta_j + a}\right) = 0 \tag{27}$$

gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Pokażemy teraz, że liczby a, które spełniają równanie (27), są liczbami ujemnymi. W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że $a \geq 0$. Z tego, że:

$$\frac{G^* + \delta_j}{G^* + \delta_j + a} \leq 1$$

wynika, iż:

$$1 = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_j\left(G^* + \delta_j\right)}{G^* + \delta_j + a}\right) = \alpha_1\frac{G^* + \delta_1}{G^* + \delta_1 + a} + \ldots + \alpha_N\frac{G^* + \delta_1}{G^* + \delta_1 + a} \leq \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$$

co prowadzi do sprzeczności, bo $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j < 1$.

Płynie stąd wniosek, że ponieważ wszystkie wartości własne macierzy $\tilde{J}$ są ujemne, więc z twierdzenia Grobmana-Hartmana wynika, że punkt stacjonarny układu równań różniczkowych (11) jest asymptotycznie stabilny. Oznacza to, że istnieje pewne otoczenie $\Im \subset P$ punktu stacjonarnego $\left(G_1^*, G_2^*, \ldots, G_N^*\right) \in P$ takie, że jeśli w momencie $t = 0$ stopy wzrostu kolejnych zasobów kapitału wychodzą z pewnej struktury $\left(G_1^0, G_2^0, \ldots, G_N^0\right) \in \Im$, to (najpóźniej przy $t \to +\infty$) dotrą one do punktu stacjonarnego $\left(G_1^*, G_2^*, \ldots, G_N^*\right)$ opisanego przez równanie (9). Dlatego też w długim okresie stopy wzrostu $\dot{G}_j \equiv \dot{K}_j / K_j$ (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$) dążą wówczas do wielkości równych $\dfrac{\Theta\mu}{1 - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m}$.

Logarytmując stronami i różniczkując względem czasu $t \in [0; +\infty)$ równanie (1) okazuje się, że zachodzi związek:

$$\forall t \in [0; +\infty] \; G_Y(t) \equiv \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j \frac{\dot{K}_j(t)}{K_j(t)}\right) + \Theta \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} Y(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j G_j(t)\right) + \Theta \frac{\dot{E}(t)}{E(t)}$$

gdzie $G_Y \equiv \dot{Y}/Y$ to stopa wzrostu strumienia produktu Y. Ponieważ na mocy równania (3), w każdym momencie $t \in [0; +\infty)$ zachodzi: $\dot{E}(t)/E(t) = \mu$, zatem powyższe równanie można zapisać następująco:

$$\forall t \in [0; +\infty] \quad G_Y(t) = \Theta\mu + \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j G_j(t)\right). \tag{28}$$

W warunkach długookresowej równowagi $\forall j = 1, 2, \ldots, N$ $G_j^* = \dfrac{W_j}{W} = \dfrac{\Theta\mu}{1 - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m}$, zatem zgodnie z równaniem (28) długookresową stopę wzrostu produktu, G_Y^*, można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0; +\infty] \quad G_Y^* &= \Theta\mu + \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j G_j^*\right) = \Theta\mu + G^* \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = \\ &= \Theta\mu + \frac{\Theta\mu}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = \frac{\Theta\mu}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} = G^* \end{aligned} \tag{29}$$

Z równań (9) i (29) płyną następujące wnioski natury ekonomicznej:

- Długookresowe stopy wzrostu produkcji i każdego z analizowanych w pracy zasobów kapitału zależne są od elastyczności funkcji produkcji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ i Θ oraz od stopy wzrostu jednostek efektywnej pracy $\mu = g + n$.
- Stąd, że:

$$\frac{\partial G^*}{\partial \mu} = \frac{\Theta}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} > 0$$

płynie wniosek, iż im wyższa jest stopa wzrostu jednostek efektywnej pracy μ, tym wyższe są długookresowe stopy wzrostu produktu $G_Y^* = G^*$ i kolejnych zasobów kapitału $G_j^* = G^*$ (dla każdego j = 1, 2, …, N).

- Ponieważ:

$$\forall j \in 1,2,\ldots,N \quad \frac{\partial G^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\Theta\mu}{\left(1 - \sum_{m=1}^{N}\alpha_m\right)^2} > 0$$

więc im wyższe są elastyczności funkcji produkcji (1) względem nakładów j-tego czynnika kapitałowego (dla każdego j = 1, 2, …, N), tym wyższe są długookresowe stopy wzrostu owych czynników kapitału i stopa wzrostu strumienia produktu.

- Różniczkując równania (9) i (29) względem Θ okazuje się, iż:

$$\frac{\partial G^*}{\partial \Theta} = \frac{\mu}{1 - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j} > 0$$

co oznacza, że wysokiej elastyczności Θ produkcji Y względem nakładów efektywnej pracy E odpowiadają wysokie stopy wzrostu rozważanych tu zmiennych makroekonomicznych.

- Z dwóch ostatnich wniosków wynika, iż im wyższy jest stopień jednorodności $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j + \Theta$ makroekonomicznej funkcji produkcji (1), tym wyższe są długookresowe stopy wzrostu wyróżnionych w analizowanym tu modelu wzrostu zasobów kapitału i strumienia produktu.

Oznaczmy też przez y, k_1, k_2, …, k_N dane wzorami:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad y(t) \equiv Y(t)/L(t)$$

oraz:

$$\forall t \in [0; +\infty)\forall j = 1,2,\ldots,N \quad k_j(t) \equiv K_j(t)/L(t)$$

strumień wydajności pracy (y) oraz nakłady j-tego zasobu kapitału na pracującego (k_j dla każdego j = 1, 2, …, N). Z powyższych tożsamości wynika, że:

$$\forall t \in [0; +\infty] \quad g_y(t) \equiv \frac{\dot{y}(t)}{y(y)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = G_Y(t) - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$$

i:

$$\forall t \in [0; +\infty]\forall j = 1,2,\ldots,N \quad g_j(t) \equiv \frac{\dot{k}_j(t)}{k_i(t)} = \frac{\dot{K}_j(t)}{K_j(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = G_j(t) - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$$

gdzie g_y jest stopą wzrostu wydajności pracy, zaś g_j (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$) to stopa wzrostu j-tego zasobu kapitału na pracującego. Uwzględniając to, że (zgodnie z założeniem 3 analizowanego modelu wzrostu gospodarczego) $\dot{L}(t)/L(t)$ powyższe równania można zapisać następująco:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad g_y(t) = G_Y(t) - n$$

oraz:

$$\forall t \in [0; +\infty) \forall j = 1,2,\ldots,N \quad g_j(t) = G_j(t) - n$$

Stąd zaś oraz ze związków (3), (9) i (29) płynie wniosek, że w długim okresie zachodzi zależność:

$$g_y^* = g_1^* = g_2^* = \ldots = g_N^* = G^* - n = \frac{\Theta(g+n)}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} - n$$

lub:

$$g_y^* = g_1^* = g_2^* = \ldots = g_N^* = \frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - 1\right) n}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} = g^* \tag{30}$$

Z równania (30) płyną następujące wnioski natury ekonomicznej (por. też [Tokarski, 2007 i 2008, rozdział 2]):

- Ponieważ:

$$\frac{\partial g_y^*}{\partial \Theta} = \frac{\partial g_1^*}{\partial \Theta} = \frac{\partial g_2^*}{\partial \Theta} = \ldots = \frac{\partial g_N^*}{\partial \Theta} = \frac{g+n}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} > 0$$

  zatem wysokiej elastyczności Θ wytworzonego produktu Y względem nakładów efektywnej pracy E odpowiadają wysokie stopy wzrostu analizowanych tu zmiennych makroekonomicznych przypadających na jednego pracującego.

- Co więcej, przy $\Theta > \frac{\left(1 - \Theta - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\right) n}{g}$ wysokim elastycznościom α_j makroekonomicznej funkcji produkcji względem nakładów j-tego zasobu kapitału K_j (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$) towarzyszą wysokie stopy wzrostu $y, k_1, k_2, \ldots, k_N$ w długim okresie. Dzieje się tak dlatego, że:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \frac{\partial g_y^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial g_1^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial g_2^*}{\partial \alpha_j} = \ldots = \frac{\partial g_N^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - 1\right) n}{\left(1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\right)^2} > 0$$

W przypadku, w którym $\Theta < \frac{\left(1 - \Theta - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\right) n}{g}$ zachodzi związek:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \frac{\partial g_y^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial g_1^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial g_2^*}{\partial \alpha_j} = \ldots = \frac{\partial g_N^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - 1\right) n}{\left(1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\right)^2} < 0$$

i wysokie elastyczności α_j (dla $j = 1, 2, \ldots, N$) prowadzą do niskich długookresowych stóp wzrostu $y, k_1, k_2, \ldots, k_N$. Natomiast przy $\Theta > \frac{\left(1 - \Theta - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\right) n}{g}$ rozważane tu pochodne cząstkowe równe są 0 i elastyczności te nie oddziałują na $g_y^* = g_1^* = g_2^* = \ldots = g_N^* = \frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - 1\right) n}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j}$.

- Różniczkując równanie (30) względem stopy harrodiańskiego postępu technicznego g okazuje się, iż:

$$\frac{\partial g_y^*}{\partial g} = \frac{\partial g_1^*}{\partial g} = \frac{\partial g_2^*}{\partial g} = \ldots = \frac{\partial g_N^*}{\partial g} = \frac{\Theta}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} > 0$$

co implikuje, że wysoka stopa egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda przekłada się na wysoką stopę wzrostu wydajności pracy i wysokie stopy wzrostu kolejnych nakładów kapitału na pracującego w długim okresie.
- Stąd, że:

$$\frac{\partial g_y^*}{\partial n} = \frac{\partial g_1^*}{\partial n} = \frac{\partial g_2^*}{\partial n} = \ldots = \frac{\partial g_N^*}{\partial n} = \frac{\Theta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - 1}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j}$$

płyną dwa następujące wnioski. Po pierwsze, jeśli w gospodarce występują stałe efekty skali, czyli $\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j = 1$, to pochodne cząstkowe $\frac{\partial g_y^*}{\partial n} = \frac{\partial g_1^*}{\partial n} = \frac{\partial g_2^*}{\partial n} = \ldots = \frac{\partial g_N^*}{\partial n}$ równe są 0 i stopy wzrostu wydajności pracy i kolejnych nakładów kapitału na pracującego, podobnie jak ma to miejsce w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego Solowa [1956], Mankiwa, Romera, Weila [1992] i Nonnemana, Vanhoudta [1996], są niezależne od stopy wzrostu liczby pracujących. Po drugie, jeśli zaś występują rosnące (malejące) efekty skali, co ma miejsce wówczas, gdy $\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j > 1\left(\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j < 1\right)$, to pochodne $\frac{\partial g_y^*}{\partial n} = \frac{\partial g_1^*}{\partial n} = \frac{\partial g_2^*}{\partial n} = \ldots = \frac{\partial g_N^*}{\partial n}$ są dodatnie (ujemne), co implikuje, że wysoka stopa wzrostu liczby pracujących, podobnie jak w modelach prezentowanych w pracach Tokarskiego [2003 i 2008], prowadzi do wysokich (niskich) stóp wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych na pracującego.

Położenie długookresowych ścieżek wzrostu gospodarczego

Dzieląc funkcję produkcji (1) przez liczbę pracujących $L(t) = L_0 e^{nt}$ (gdzie $L_0 > 0$ jest liczbą pracujących w momencie $t = 0$) okazuje się, że zachodzi związek:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{\prod_{j=1}^{N}\left(K_j(t)\right)^{\alpha_j} \cdot (E(t))^{\Theta}}{L(t)} = \frac{\prod_{j=1}^{N}\left(K_j(t)\right)^{\alpha_j} \cdot \left(A_0 L_0 e^{(g+n)t}\right)^{\Theta}}{L_0 e^{nt}}$$

przy czym $A_0 > 0$ jest zasobem wiedzy w momencie $t = 0$. Powyższą zależność można również zapisać następująco:

$$\begin{aligned}\forall t \in [0; +\infty) \quad y(t) &= A_0^{\Theta} e^{\Theta g t}\left(L(t)\right)^{\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j - 1}\prod_{j=1}^{N}\left(k_j(t)\right)^{\alpha_j} = \\ &= \hat{A}\exp\left(\left(\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j - 1\right)n\right)t\right)\prod_{j=1}^{N}\left(k_j(t)\right)^{\alpha_j}\end{aligned} \tag{31}$$

gdzie: $\hat{A} = A_0^{\Theta}\left(L_0\right)^{\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j - 1} > 0$.

Ponieważ dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$ zachodzi $k_j \equiv K_j/L$, zatem (po zróżniczkowaniu tych tożsamości względem czasu $t \in [0; +\infty)$) dochodzi się do równań:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \dot{k}_j(t) = \\ = \frac{\dot{K}_j(t)L(t) - K_j(t)\dot{L}(t)}{(L(t))^2} = \frac{\dot{K}_j(t)}{L(t)} - k_j(t)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$$

a stąd i z założenia 3 wynika, że:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \dot{k}_j(t) = \frac{\dot{K}_j(t)}{L(t)} - nk_j(t) \tag{32}$$

Stawiając do równań (32) związki (2) uzyskuje się równania różniczkowe dane wzorami:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \dot{k}_j(t) = s_j y(t) - \left(\delta_j + n\right)k_j(t)$$

lub po uwzględnieniu zależności (31):

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N$$

$$\dot{k}_j(t) = s_j\hat{A}\exp\left(\left(\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j - 1\right)n\right)t\right)\prod_{j=1}^{N}\left(k_j(t)\right)^{\alpha_j} + \left(\delta_j + n\right)k_j(t)$$

a stąd, po podstawieniu tożsamości $g_j \equiv \dot{k}_j/k_j$ (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$) i równania (30):

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad g_j(t) = s_j\hat{A}\exp\left(g^* \cdot t\left(1 - \sum_{m=1}^{N}\alpha_m\right)\right)\cdot \\ \cdot\left(k_j(t)\right)^{\alpha_j - 1}\prod_{m=1, m\neq j}^{N}\left(k_m(t)\right)^{\alpha_m} - \left(\delta_j + n\right) \tag{33}$$

Zdefiniujmy teraz przez:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \hat{k}_j(t) = e^{-g^* t}k_j(t) = \\ = \exp\left(-\frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{m=1}^{N}\alpha_m - 1\right)n}{1 - \sum_{m=1}^{N}\alpha_m}t\right)\cdot k_j(t) \tag{34a}$$

oraz:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad \hat{y}(t) = e^{-g^* t}y(t) = \exp\left(-\frac{\Theta g + \left(\Theta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j - 1\right)n}{1 - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j}t\right)\cdot y(t) \tag{34b}$$

zmienne sztuczne, których wartości są funkcyjnie związane z położeniem ścieżek wzrostu (odpowiednio) j-tego zasobu kapitału na pracującego k_j (dla $j = 1, 2, \ldots, N$) oraz wydajności pracy y. Należy to rozumieć w ten sposób, iż im wyższe wartości przyjmują owe zmienne sztuczne, tym wyżej położone są ścieżki wzrostu analizowanych w opracowaniu zmiennych makroekonomicznych.

Równania (34a) zapisać można również jako:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad k_j(t) = e^{g^* t}\hat{k}_j(t)$$

lub po zlogarytmowaniu stronami i zróżniczkowaniu względem czasu $t \in [0; +\infty)$:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad g_j(t) \equiv \frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = g^* - \frac{\dot{\hat{k}}_j(t)}{\hat{k}_j(t)} \tag{35}$$

Ponieważ, jak to pokazano punkcie 2 opracowania, w długim okresie (czyli przy $t \to +\infty$) $g_j \to g^*$ (dla $j = 1, 2, \ldots, N$), więc stąd i z równania (35) wynika, że:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \lim_{t \to +\infty} \hat{k}_j(t) = \hat{k}_j^* > 0 \tag{36}$$

gdzie wartości zmiennych sztucznych $\hat{k}_j^*$ zależne są od wartości zmiennych egzogenicznych w rozważanym tu modelu wzrostu gospodarczego, zaś wysokie wartości owych zmiennych tożsame są w wysokim położeniem długookresowych ścieżek wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego.

Z zależności (33) i (34a) wynika, że związek (33) można zapisać następująco:

$$\forall t \in [0; +\infty)\,\forall j = 1,2,\ldots,N \quad g_j(t) = s_j\hat{A}\left(\hat{k}_j(t)\right)^{\alpha_j - 1}\prod_{m=1, m\neq j}^{N}\left(\hat{k}_m(t)\right)^{\alpha_m} - \left(\delta_j + n\right) \tag{37}$$

W tego, że przy $t \to +\infty$ $g_j(t) \to g^*$ oraz $\hat{k}_j(t) \to \hat{k}_j^*$ (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$) płynie wniosek, iż przy $t \to +\infty$ równania (37) sprowadzają się do związków[5]:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad g^* = s_j\hat{A}\left(\hat{k}_j^*\right)^{\alpha_j - 1}\prod_{m=1, m\neq j}^{N}\left(\hat{k}_m^*\right)^{\alpha_m} - \left(\delta_j + n\right) \tag{38}$$

które implikują równania:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \left(\hat{k}_j^*\right)^{1-\alpha_j}\prod_{m=1, m\neq j}^{N}\left(\hat{k}_m^*\right)^{-\alpha_m} = \frac{s_j\hat{A}}{g^* + n + \delta_j}$$

---

5 Ponieważ przy $k_1, k_2,\ldots,k_N > 0$ dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$ zachodzi: $s_j\hat{A}\left(\hat{k}_j^*\right)^{\alpha_j - 1}\prod_{m=1, m\neq j}^{N}\left(\hat{k}_m^*\right)^{\alpha_m} > 0$, zatem z równania (38) wynika, iż każdego $j = 1, 2, \ldots, N$ spełniona jest zależność: $g^* + n + \delta_j > 0$.

lub:

$$\left.\begin{array}{r}(1-\alpha_1)\ln\left(\hat{k}_1^*\right)-\alpha_2\ln\left(\hat{k}_2^*\right)-\ldots-\alpha_N\ln\left(\hat{k}_N^*\right)=\ln(\theta_1)\\ -\alpha_1\ln\left(\hat{k}_1^*\right)+(1-\alpha_2)\ln\left(\hat{k}_2^*\right)-\ldots-\alpha_N\ln\left(\hat{k}_N^*\right)=\ln(\theta_2)\\ \vdots\qquad\qquad\qquad\\ -\alpha_1\ln\left(\hat{k}_1^*\right)-\alpha_2\ln\left(\hat{k}_2^*\right)-\ldots+(1-\alpha_N)\ln\left(\hat{k}_N^*\right)=\ln(\theta_N)\end{array}\right\}\tag{39}$$

gdzie:

$$\forall j=1,2,\ldots,N\quad \theta_j=\frac{s_j\hat{A}}{g^*+n+\delta_j}>0\tag{40}$$

Odejmując do pierwszego, drugiego, ..., (N – 1)-szego równania układu równań (39) równanie N-te okazuje się, iż:

$$\forall j=1,2,\ldots,N-1\quad \ln\left(\hat{k}_j^*\right)=\ln\left(\hat{k}_N^*\right)+\ln\left(\frac{\theta_j}{\theta_N}\right)\tag{41}$$

N-te równanie układu równań (39) można również zapisać następująco:

$$(1-\alpha_N)\ln\left(\hat{k}_N^*\right)-\sum_{j=1}^{N-1}\left(\alpha_j\ln\left(\hat{k}_j^*\right)\right)=\ln(\theta_N)$$

a stąd oraz z równań (41) wynika, iż:

$$(1-\alpha_N)\ln\left(\hat{k}_N^*\right)-\sum_{j=1}^{N-1}\left(\alpha_j\left(\ln\left(\hat{k}_N^*\right)+\ln\left(\frac{\theta_j}{\theta_N}\right)\right)\right)=\ln(\theta_N)$$

czyli:

$$\left(1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\right)\ln\left(\hat{k}_N^*\right)=\left(1-\sum_{j=1}^{N-1}\alpha_j\right)\ln(\theta_N)+\sum_{j=1}^{N-1}\left(\alpha_j\ln(\theta_j)\right)$$

lub:

$$\ln\left(\hat{k}_N^*\right)=\frac{\left(1-\sum_{j=1}^{N-1}\alpha_j\right)\ln(\theta_N)+\sum_{j=1}^{N-1}\left(\alpha_j\ln(\theta_j)\right)}{1-\sum_{j-1}^{N}\alpha_j}\tag{42}$$

Wstawiając związek (42) do zależności (41) dochodzi się do równania:

$$\forall j=1,2,\ldots,N-1\quad \ln\left(\hat{k}_j^*\right)=\frac{\left(1-\sum_{m=1}^{N-1}\alpha_m\right)\ln(\theta_N)+\sum_{m=1}^{N-1}\left(\alpha_m\ln(\theta_m)\right)}{1-\sum_{m-1}^{N}\alpha_m}+\ln\left(\frac{\theta_j}{\theta_N}\right)$$

lub:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N-1 \quad \ln\left(\hat{k}_j^*\right) = \frac{\left(1 - \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N} \alpha_m\right)\ln\left(\theta_j\right) + \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N}\left(\alpha_m \ln\left(\theta_m\right)\right)}{1 - \sum\limits_{m=1}^{N} \alpha_m}$$

a stąd i ze związku (42) płynie wniosek, że:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \ln\left(\hat{k}_j^*\right) = \frac{\left(1 - \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N} \alpha_m\right)\ln\left(\theta_j\right) + \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N}\left(\alpha_m \ln\left(\theta_m\right)\right)}{1 - \sum\limits_{m=1}^{N} \alpha_m}$$

lub po uwzględnieniu związku (40):

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \ln\left(\hat{k}_j^*\right) = \\ = \frac{\left(1 - \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N} \alpha_m\right)\ln\left(\frac{s_j \hat{A}}{g^* + n + \delta_j}\right) + \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N}\left(\alpha_m \ln\left(\frac{s_m \hat{A}}{g^* + n + \delta_m}\right)\right)}{1 - \sum\limits_{m=1}^{N} \alpha_m}$$

czyli, po uwzględnieniu zależności (30):

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \ln\left(\hat{k}_j^*\right) = \\ = \frac{\left(1 - \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N} \alpha_m\right)\ln\left(\frac{s_j \hat{A}}{g^* + n + \delta_j}\right) + \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N}\left(\alpha_m \ln\left(\frac{s_m \hat{A}}{g^* + n + \delta_m}\right)\right)}{1 - \sum\limits_{m=1}^{N} \alpha_m} \tag{43}$$

Z równania (43) wyciągnąć można następujące wnioski:

- Położenie długookresowej ścieżki wzrostu k_j^* każdego z analizowanych w opracowaniu zasobów kapitału na pracującego zależne jest m.in. od stopy inwestycji s_j i stopy deprecjacji δ_j owego zasobu kapitału oraz od stóp inwestycji s_m i stóp deprecjacji δ_m pozostałych zasobów kapitału.
- Stąd, że:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \frac{\partial\left(\ln\left(\hat{k}_j^*\right)\right)}{\partial s_j} = \frac{1 - \sum\limits_{m=1, m \neq j}^{N} \alpha_m}{\left(1 - \sum\limits_{m=1}^{N} \alpha_m\right) s_j} > 0$$

wynika, że im wyższa jest stopa inwestycji s_j w j-ty zasób kapitału (dla $j = 1, 2, \ldots, N$), tym wyższa jest wartość zmiennej sztucznej $\hat{k}_j^*$ i wyżej położona jest długookresowa ścieżka wzrostu j-tego zasobu kapitału na pracującego.

- Ponieważ:

$$\forall j,m = 1,2,\ldots,N, m \neq j \quad \frac{\partial\left(\ln\left(\hat{k}_j^*\right)\right)}{\partial s_m} = \frac{\alpha_m}{\left(1 - \sum\limits_{m=1}^{N}\alpha_m\right)s_m} > 0$$

więc wysokiej stopie inwestycji s_m w m-ty zasób kapitału (dla $m = 1, 2, \ldots, N$) odpowiada wysokie położenie ścieżek wzrostu j-tego zasobu kapitału na pracującego (dla $j \neq m$).

- Im wyższa jest stopa deprecjacji j-tego zasobu kapitału (dla $j = 1, 2, \ldots, N$) tym niżej położona jest długookresowa ścieżka wzrostu owego kapitału na pracującego. Wynika to stąd, iż:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \frac{\partial\left(\ln\left(\hat{k}_j^*\right)\right)}{\partial \delta_j} = -\frac{1 - \sum\limits_{m=1, m\neq j}^{N}\alpha_m}{\left(1 - \sum\limits_{m=1}^{N}\alpha_m\right)\left(g^* + n + \delta_j\right)} < 0$$

- Wysokiej stopie deprecjacji m-tego zasobu kapitału (dla $m = 1, 2, \ldots, N$; $m \neq j$) odpowiadają nisko położone długookresowe ścieżki wzrostu j-tego zasobu kapitału na pracującego. Dzieje się tak dlatego, że:

$$\forall j,m = 1,2,\ldots,N, m \neq j \quad \frac{\partial\left(\ln\left(\hat{k}_j^*\right)\right)}{\partial \delta_m} = -\frac{\alpha_m}{\left(1 - \sum\limits_{m=1}^{N}\alpha_m\right)\left(g^* + n + \delta_j\right)} < 0$$

Dzieląc stronami równanie (31) przez $\exp\left(\dfrac{\Theta g + \left(\Theta + \sum\limits_{m=1}^{N}\alpha_m - 1\right)n}{1 - \sum\limits_{m=1}^{N}\alpha_m}t\right)$ oraz uwzględniając związki (34ab) uzyskuje się:

$$\forall t \in [0; +\infty)\, \hat{y}(t) = \hat{A}\exp\left(-\frac{\left(\Theta g + \left(\Theta + \sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j - 1\right)n\right)}{1 - \sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j t\right)\prod_{j=1}^{N}\left(k_j(t)\right)^{\alpha_j} =$$

$$= \hat{A} \prod_{j=1}^{N} \left(\exp\left(-\frac{\left(\Theta g + \left(\Theta + \sum_{m=1}^{N} \alpha_m - 1\right) n\right)}{1 - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m} t \right) \cdot k_j(t) \right)^{\alpha_j} = \hat{A} \prod_{j=1}^{N} \left(\hat{k}_j(t)\right)^{\alpha_j}$$

lub:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad \ln(\hat{y}(t)) = \ln(\hat{A}) + \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j \ln\left(\hat{k}_j(t)\right)\right) \tag{44}$$

Ponieważ przy $t \to +\infty$ $\hat{k}_j(t) \to \hat{k}_j^*$ (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$), zatem – zgodnie z równaniem (44) – również $\hat{y}(t) \to \hat{y}^*$, gdzie:

$$\ln(\hat{y}^*) = \ln(\hat{A}) + \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j \ln\left(\hat{k}_j^*\right)\right)$$

Stąd zaś oraz ze związku (43) wynika, iż zachodzi zależność:

$$\ln(\hat{y}^*) = \ln(\hat{A}) + \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j \frac{\left(1 - \sum_{m=1, m \neq j}^{N} \alpha_m\right) \ln\left(\frac{s_j \hat{A}}{g^* + n + \delta_j}\right) + \sum_{m=1, m \neq j}^{N} \left(\alpha_m \ln\left(\frac{s_m \hat{A}}{g^* + n + \delta_m}\right)\right)}{1 - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m} \right)$$

lub:

$$\ln(\hat{y}^*) = \ln(\hat{A}) + \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j \ln\left(\frac{s_j \hat{A}}{g^* + n + \delta_j}\right)\right)}{1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j} \tag{45}$$

Z równania (45) płyną następujące wnioski:

- Wartość zmiennej sztucznej $\hat{y}^*$ i położenie długookresowej ścieżki wzrostu wydajności pracy y w analizowanym tu modelu wzrostu gospodarczego zależne są m.in. od stóp inwestycji s_j oraz stóp deprecjacji δ_j (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$).
- Stąd, iż:

$$\forall j = 1, 2, \ldots, N \quad \frac{\partial \left(\ln(\hat{y}^*)\right)}{\partial s_j} = \frac{\alpha_j}{\left(1 - \sum_{m=1}^{N} s_j\right)} > 0$$

oraz:

$$\forall j = 1,2,\dots,N \quad \frac{\partial \left(\ln(\hat{y}^*)\right)}{\partial \delta_j} = -\frac{\alpha_j}{\left(1 - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m\right)\left(g^* + n + \delta_j\right)} < 0$$

wyciągnąć można wniosek, że wysokim (niskim) stopom inwestycji s_j (stopom deprecjacji δ_j) odpowiada wysoka wartość zmiennej $\hat{y}^*$ oraz wysokie położenie długookresowej ścieżki wzrostu wydajności pracy y.

Złote reguły akumulacji

Na stronie 61 prezentowanego opracowania pokazano, że w analizowanym tu modelu wzrostu gospodarczego (podobnie jak w neoklasycznych modelach Solowa [1956], Mankiwa, Romera, Weila [1992] oraz Nonnemana, Vanhoudta [1996]) długookresowe ścieżki wzrostu wydajności pracy i kolejnych zasobów kapitałów na pracującego są tym wyżej położone, im wyższe są stopy inwestycji s_1, s_2, …, s_N. Warto jednak zauważyć, że wysokie położenie ścieżek wzrostu wspomnianych uprzednio zmiennych makroekonomicznych nie musi być tożsame z wysokim położeniem ścieżki wzrostu konsumpcji na pracującego. Wynika to stąd, iż (zgodnie z przyjmowanymi w opracowaniu założeniami str. 48) konsumpcję na pracującego można zapisać następująco:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad C(t) = \left(1 - \sum_{j=1}^{N} s_j\right) Y(t)$$

Dzieląc powyższe równanie przez liczbę pracujących $L > 0$ uzyskuje się funkcję konsumpcji na pracującego $c \equiv C/L$ daną wzorem:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad c(t) = \left(1 - \sum_{j=1}^{N} s_j\right) y(t) \tag{46}$$

lub:

$$\forall t \in [0; +\infty) \quad \hat{c}(t) = \left(1 - \sum_{j=1}^{N} s_j\right) \hat{y}(t) \tag{47}$$

Im wyższe wartości przyjmują zmienne sztuczne $\hat{c}$ w równaniu (47), tym wyżej położona jest ścieżka wzrostu $c(t)$ dana równaniem (46). W długim okresie przy $t \to +\infty$, $\hat{y}(t) \to \hat{y}^*$, co (zgodnie ze związkami (45) oraz (47)) oznacza, że $\hat{c}(t) \to \hat{c}^*$, gdzie:

$$\hat{c}^* = \left(1 - \sum_{j=1}^{N} s_j\right) \hat{A} \prod_{j=1}^{N} \left(\left(\frac{s_j \hat{A}}{g^* + n + \delta_j} \right)^{\frac{\alpha_j}{1 - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m}} \right) \tag{48}$$

Z równań (47-48) wynika, że wzrost którejkolwiek, lub wszystkich, stóp inwestycji prowadzi do wzrostu wartości $\hat{y}^*$ przy spadku udziału w konsumpcji w produkcji $1 - \sum_{j=1}^{N} s_j$. To zaś może prowadzić do różnokierunkowych zmian po stronie $\hat{c}^*$. Dlatego też, zgodnie z ideą złotych reguły Phelpsa [1961], złotą regułę akumulacji można zdefiniować jako taką strukturę stóp inwestycji $(s_1, s_2, \ldots, s_N)$ (gdzie $s_1, s_2, \ldots, s_N > 0$ oraz $\sum_{j=1}^{N} s_j < 0\Big)$, przy której gospodarka wchodzi na najwyżej położoną długookresową ścieżkę konsumpcji na pracującego (por. też [Tokarski, 2005, punkt 5.2]). Dlatego też złotą regułą akumulacji kapitału będzie taka struktura stóp inwestycji $(s_1, s_2, \ldots, s_N)$, która maksymalizuje zmienną sztuczną $\hat{c}^*$ daną równaniem (48).

Maksymalizacja $\hat{c}^*$ tożsama jest z maksymalizacją funkcji $V(s_1, s_2, \ldots, s_N)$ danej wzorem:

$$V(s_1, s_2, \ldots, s_N) = \ln\left(\hat{c}^*(s_1, s_2, \ldots, s_N)\right) = \ln\left(1 - \sum_{j=1}^{N} s_j\right) + \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j \ln(s_j)\right)}{1 - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j} + \hat{B} \quad (49)$$

gdzie:

$$\hat{B} = \ln(\hat{A}) + \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j \ln\left(\frac{\hat{A}}{g^* + n + \delta_j}\right)\right)}{1 - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j}$$

Warunki konieczne maksymalizacji funkcji (49) określone są przez zależności:

$$\forall j = 1, 2, \ldots, N \quad \frac{\partial V}{\partial s_j} = -\frac{1}{1 - \sum_{m=1}^{N} s_m} + \frac{\alpha_j}{\left(1 - \sum_{m=1}^{N}\alpha_m\right)s_j} = 0 \quad (50)$$

zaś warunki dostateczne sprowadzają się do tego, iż hesjan funkcji V dany wzorem:

$$H(s_1, s_2, \ldots, s_N) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_N} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial s_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s_N \partial s_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial s_N \partial s_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial s_N^2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

jest ujemnie określony w punkcie stacjonarnym funkcji V.

Warunki konieczne (50) maksymalizacji funkcji V można sprowadzić do równości:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \left(1 - \sum_{m=1}^{N} s_m\right) s_j = \left(1 - \sum_{m=1}^{N} s_m\right) \alpha_j$$

co implikuje, że analizowany tu punkt stacjonarny określa równanie:

$$(s_1, s_2, \ldots, s_N) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \tag{52}$$

Licząc drugie pochodne funkcji V okazuje się, że:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s_j^2} = -\left(\frac{1}{\left(1 - \sum_{m=1}^{N} s_m\right)^2} + \frac{\alpha_j}{\left(1 - \sum_{m=1}^{N} \alpha_m\right) s_j^2}\right)$$

oraz:

$$\forall j,m = 1,2,\ldots,N, m \neq j \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s_j \, \partial s_m} = -\frac{1}{\left(1 - \sum_{p=1}^{N} s_p\right)^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial s_m \, \partial s_j}$$

co oznacza, iż hesjan (51) można zapisać wzorem:

$$H(s_1, s_2, \ldots, s_N) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{\alpha_1}{\omega s_1^2}\right) & -\frac{1}{\omega^2} & \cdots & -\frac{1}{\omega^2} \\ -\frac{1}{\omega^2} & -\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{\alpha_2}{\omega s_2^2}\right) & \cdots & -\frac{1}{\omega^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\omega^2} & -\frac{1}{\omega^2} & \cdots & -\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{\alpha_N}{\omega s_N^2}\right) \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\omega = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{N} s_j} > 0$$

lub w punkcie stacjonarnym $(s_1, s_2, \ldots, s_N) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$:

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1+\omega}{\omega^2\alpha_1} & -\frac{1}{\omega^2} & \cdots & -\frac{1}{\omega^2} \\ -\frac{1}{\omega^2} & -\frac{\alpha_2+\omega}{\omega^2\alpha_2} & \cdots & -\frac{1}{\omega^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\omega^2} & -\frac{1}{\omega^2} & \cdots & -\frac{\alpha_N+\omega}{\omega^2\alpha_N} \end{bmatrix} \tag{53}$$

Hesjan (53) będzie ujemnie określony wtedy, i tylko wtedy, gdy:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad (-1)^j m_j > 0 \tag{54}$$

gdzie j-ty minor główny m_j hesjanu (53) dany jest wzorem:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad m_j = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1+\omega}{\omega^2\alpha_1} & -\frac{1}{\omega^2} & \cdots & -\frac{1}{\omega^2} \\ -\frac{1}{\omega^2} & -\frac{\alpha_2+\omega}{\omega^2\alpha_2} & \cdots & -\frac{1}{\omega^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\omega^2} & -\frac{1}{\omega^2} & \cdots & -\frac{\alpha_j+\omega}{\omega^2\alpha_j} \end{vmatrix} \tag{55}$$

Ponieważ minory m_j można zapisać następująco:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad m_j = \frac{(-1)^j}{\omega^j \prod_{m=1}^{j}\alpha_m} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{\alpha_1}{\omega} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{\alpha_2}{\omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sum_{m=1}^{j}\alpha_m + \omega}{\omega} \end{vmatrix}$$

zatem zachodzą równości:

$$\forall j = 1,2,\ldots,N \quad m_j = \frac{(-1)^j\left(\sum_{m=1}^{j}\alpha_m + \omega\right)}{\omega^{j+1}\prod_{m=1}^{j}\alpha_m}$$

Stąd zaś oraz z zależności (54) wynika, że:

$$\forall j = 1, 2, \ldots, N \quad (-1)^j m_j = \frac{(-1)^{2j}\left(\sum_{m=1}^{j} \alpha_m + \omega\right)}{\omega^{j+1} \prod_{m=1}^{j} \alpha_m} > 0$$

czyli hesjan (54) jest ujemnie określony w punkcie stacjonarnym funkcji V. Oznacza to, iż punkt ów wyznacza złote reguły akumulacji kapitału w analizowanym tu modelu wzrostu gospodarczego. Płynie stąd wniosek, iż rozważana w opracowaniu gospodarka, analogicznie jak gospodarka w modelu Solowa lub Mankiwa-Romera-Weila, będzie wychodziła na najwyżej położoną ścieżkę wzrostu konsumpcji na pracującego wtedy, i tylko wtedy, gdy stopy inwestycji w kolejne zasoby kapitału (czyli s_j) równe będą elastycznościom (α_j) produkcji Y względem nakładów j-tego nakładu kapitału K_j (dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$).

Podsumowanie i wnioski

Prowadzone w pracy rozważania można podsumować następująco:

I. W analizowanym w pracy modelu wzrostu gospodarczego przyjmuje się założenia, że (po pierwsze) proces produkcyjny opisany jest przez potęgową funkcję produkcji Cobba-Douglasa, w której do wytworzenia produktu niezbędne jest N różnych nakładów kapitałowych oraz nakłady jednostek efektywnej pracy, (po drugie) funkcja produkcji może charakteryzować się zarówno malejącymi, jak i stałymi lub rosnącymi efektami skali, (po trzecie) przyrost każdego z zasobów kapitału jest różnicą pomiędzy inwestycjami w ów zasób a jego deprecjacją oraz (po czwarte) jednostki efektywnej pracy rosną według egzogenicznej stopy wzrostu będącej sumą stopy egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda i stopy wzrostu liczby pracujących. Oznacza to, że analizowany w opracowaniu model wzrostu gospodarczego jest rozszerzeniem modelu Nonnemana-Vanhoudta na przypadek gospodarki, w której mogą wystąpić (malejące lub rosnące) efekty skali procesu produkcyjnego.

II. Z prowadzonych w części drugiej analiz wynika, że tak skonstruowany model wzrostu gospodarczego posiada punkt stacjonarny ze względu na stopy wzrostu rozważanych w modelu zasobów kapitału. Co więcej, ów punkt stacjonarny charakteryzuje się asymptotyczną stabilnością, co implikuje, że jeśli gospodarka wychodzi ze struktury stóp wzrostu analizowanych zasobów kapitału znajdującej się w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego, to (najpóźniej przy $t \to +\infty$) dążyć będzie do tegoż punktu stacjonarnego. Dlatego też wyznaczony punkt stacjonarny traktować można jako strukturę stóp wzrostu kolejnych zasobów kapitału w warunkach długookresowej równowagi w rozważanym modelu wzrostu gospodarczego.

III. W warunkach długookresowej równowagi wszystkie zasoby kapitału oraz strumień produktu rosną według tej samej stopy wzrostu, co jest analogiczne do odpowiednich wniosków płynących z neoklasycznych modeli wzrostu Solowa [1956], Mankiwa-Romera-Weila [1992], Nonnemana-Vanhoudta [1996] czy też modeli prezentowanych w książce Tokarskiego [2008].

IV. Stopy wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego oraz stopa wzrostu wydajności pracy w prezentowanym w pracy modelu wzrostu gospodarczego zależne są (po pierwsze) od elastyczności funkcji produkcji Cobba-Douglasa względem kolejnych nakładów kapitału i jednostek efektywnej pracy, (po drugie) od stopy harrodiańskiego postępu technicznego oraz (po trzecie) od stopy wzrostu liczby pracujących. Im wyższe są elastyczności makroekonomicznej funkcji produkcji a (tym samym) im wyższy jest stopień jednorodności owej funkcji, tym wyższe są długookresowe stopy wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego oraz stopa wzrostu wydajności pracy. Podobnie rzecz się ma z oddziaływaniem stopy postępu technicznego w sensie Harroda na wspomniane uprzednio stopy wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych. Natomiast oddziaływanie stopy wzrostu liczby pracujących, podobnie jak w modelach zaproponowanych w pracy Tokarskiego [2008], zależne jest od rodzaju występujących w gospodarce efektów skali. W warunkach malejących (rosnących) efektów skali wysokiej stopie wzrostu liczby pracujących *ceteris paribus* towarzyszą niskie (wysokie) stopy wzrostu gospodarczego. Natomiast stałe efekty skali procesu produkcyjnego powodują, że stopy wzrostu kolejnych nakładów kapitału na pracującego i stopa wzrostu wydajności pracy są, podobnie jak w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego, niezależne od stopy wzrostu liczby pracujących.

V. Co prawda długookresowe stopy wzrostu gospodarczego są niezależne od stóp inwestycji w kolejne zasoby kapitału, ale położenie długookresowych ścieżek wzrostu owych zasobów kapitału na pracującego oraz długookresowej ścieżki wzrostu wydajności pracy jest tym wyższe, im wyższe są stopy inwestycji w analizowane zasoby kapitału. Należy jednak pamiętać, że nie zawsze wysokie położenie ścieżki wzrostu wydajności pracy tożsame jest z wysokim położeniem ścieżki wzrostu konsumpcji na pracującego. Dzieje się tak dlatego, że konsumpcja na pracującego w skali całej gospodarki stanowi różnicę pomiędzy wydajnością pracy a sumą inwestycji na pracującego. Dlatego też ciekawe, przynajmniej z teoretycznego punktu widzenia, wydaje się wyznaczenie złotych reguł akumulacji Phelpsa rozumianych jako taka struktura stóp inwestycji, w uwzględnione w modelu zasoby kapitału, która wyprowadza gospodarkę na najwyżej położoną, długookresową ścieżkę wzrostu konsumpcji na pracującego.

VI. Z analizy złotych reguł akumulacji kapitału na gruncie rozważanego w pracy modelu wzrostu gospodarczego wynika, iż gospodarka wychodzi na najwyżej położoną, długookresową ścieżkę konsumpcji na pracującego wówczas, gdy struktura stóp inwestycji w kolejne rozważane w opracowaniu zasoby kapitału pokrywa się ze strukturą elastyczności funkcji produkcji Cobba-Douglasa względem owych zasobów. Oznacza to, iż wyznaczona w pracy złota reguła akumulacji kapitału stanowi uogólnienie złotej reguły Phelpsa

[1961] w modelach typu Solowa [1956] i Mankiwa-Romera-Weila [1992] (por. też [Tokarski, 2008, rozdziały 1-2]). Reguła ta jest również niezależna od rodzaju uzyskiwanych przez gospodarkę efektów skali procesu produkcyjnego.

Bibliografia

Krysicki W., Włodarski L., [1993], *Analiza matematyczna w zadaniach*, część II, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N., [May 1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics".

Nonneman W., Vanhoudt P., [August 1996], *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries*, „Quarterly Journal of Economics".

Ombach J., [1999], *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Maple*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Phleps E.S., [September 1961], *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, „American Economic Review".

Solow R.M., [February 1956], *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics".

Tokarski T., [2001], *Modele wzrostu endogenicznego* w W. Welfe [2001].

Tokarski T., [2003], *Specyfikacja funkcji produkcji a równowaga długookresowego wzrostu gospodarczego*, „Ekonomista" nr 3.

Tokarski T., [2005], *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Tokarski T., [2007], *Optymalne stopy inwestycji w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa" nr 9.

Tokarski T., [2008], *Efekty skali a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Welfe W. (red.), [2001], *Ekonometryczny model wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Welfe W. (red.), [2007], *Gospodarka oparta na wiedzy*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

THE GOLDEN RULES OF ACCUMULATION UNDER THE *N*-CAPITAL ECONOMIC GROWTH MODEL

Summary

The paper aims to theoretically determine the golden rules of capital accumulation – as defined by American economist Edmund S. Phelps – under the "*N*-capital" economic growth model based on a uniform macroeconomic production function, $\Xi > 0$.

With $\Xi = 1$, the macroeconomic production function discussed in the paper is characterized by constant scale effects (as in the case of neoclassical growth models developed by Solow, Mankiw, Romer, Weil, Nonneman, and Vanhoudt), the authors say, while with $\Xi < 1/\Xi > 1$ the scale effects of the production process decrease/increase.

The authors show that the growth model analyzed in the paper is characterized by asymptotic stability in a certain environment. The authors also examine the long-run growth paths of basic macroeconomic variables in the analyzed model and identify the golden rules of capital accumulation under the *N*-capital growth model when the production process leads to scale effects.

Keywords: golden rules of capital accumulation, Edmund S. Phelps, *N*-capital growth model, production function