GOSPODARKA
NARODOWA

11-12
(243-244)
Rok LXXX/XXI
listopad-grudzień
2011
s. 47-59

Anna SULIMA*

Równowaga w modelu Nonnemana-Vanhoudta z funkcją produkcji CES

Wprowadzenie**

Celem prezentowanej pracy jest zbadanie stabilności modelu wzrostu gospodarczego Nonnemana-Vanhoudta przy n-kapitałowej funkcji produkcji CES, zdefiniowanego za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych, które generują lokalny układ dynamiczny[1]. Stabilność modelu rozumiana jest jako stabilność rozwiązań tego układu równań różniczkowych w punkcie stacjonarnym.

Model wzrostu gospodarczego Nonnemana-Vanhoudta [1996] stanowi rozszerzenie modelu Solowa [1956] oraz Mankiwa-Romera-Weila [1992] na przypadek, w którym na wielkość wytworzonego w gospodarce strumienia produktu wpływa n różnych nakładów kapitałowych oraz nakłady jednostek efektywnej pracy.

Z reguły w makroekonomicznych modelach wzrostu gospodarczego przyjmuje się założenie, że proces produkcyjny opisany jest przez funkcję produkcji Cobba i Douglasa [1928]. W opisywanym modelu wykorzystuje się zaproponowaną w 1961 roku funkcję produkcji o stałej elastyczności substytucji czynników

* Autorka jest doktorantką w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz doktorantką na Wydziale Ekonomii i Stosunków Międzynarodowych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, e-mail:anna.sulima@wp.pl. Artykuł wpłynął do redakcji w październiku 2011 r.

** Autorka dziękuje Panu Prof. dr. hab. T. Tokarskiemu, Kierownikowi Katedry Ekonomii Matematycznej UJ oraz Panu Prof. dr. hab. R. Srzednickiemu, Kierownikowi Katedry Równań Różniczkowych UJ za wszystkie uwagi i wskazówki, jakie otrzymała pisząc ten artykuł.

1 Alternatywne podejście do badania równowagi modelu Nonnemana-Vanhoudta, przy funkcji produkcji CES, znaleźć można w pracy Dykas, Edigarian, Tokarski [2011].

produkcji, tzw. funkcję produkcji CES (ang. *constant elasticity of substitution*), która jest rozszerzeniem funkcji produkcji Cobba-Douglasa[2].

Badanie stabilności układów dynamicznych w teorii równań różniczkowych jest niezwykle istotne z punktu widzenia zastosowań. Stabilność mówi nam o tym, że układ po wyprowadzeniu go ze stanu równowagi sam powraca do pierwotnego stanu.

Na początku prezentowanego opracowania przedstawione są założenia molelu Nonnemana-Vanhoudta z n-kapitałową funkcją produkcji CES. Następnie udowodniono, że model ten charakteryzuje się asymptotyczną stabilnością w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego tego modelu wzrostu gospodarczego. Na koniec podano najważniejsze wnioski z prowadzonych w pracy rozważań.

Założenia modelu Nonnemana-Vanhoudta

W modelu Nonnemana-Vanhoudta z n-kapitałową funkcją produkcji CES przyjmowane są następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki:

Założenie 1. Proces produkcyjny opisany jest przez n-kapitałową funkcję produkcji CES daną wzorem:

$$Y(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_i^{-\omega}(t) + \alpha_0 E^{-\omega}(t) \right)^{-\frac{1}{\omega}} \quad \text{dla } t \in [0, \infty)$$

gdzie Y to wielkość wytworzonego w gospodarce produktu, $n \in \aleph$ to liczba wykorzystanych w procesie produkcyjnym zasobów kapitału, $K_i \geq 0$ to nakłady i-tego rodzaju kapitału (dla $i = 1, 2, \ldots, n$), zaś $E \geq 0$ to nakłady efektywnej pracy, a α_i dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ to udział poszczególnych nakładów kapitału oraz efektywnej pracy potrzebnych do wytworzenia produktu Y, ponadto dla $i = 0, 1, \ldots, n$ $\alpha_i \in (0,1)$, $\omega \in (0, \infty)$ oraz $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \in (0,1)$.

Założenie 2. Przyrosty każdego z zasobów kapitału $\dot{K}_i$ stanowią różnicę pomiędzy inwestycjami $s_i Y$ w te zasoby a ich deprecjacją $\delta_i K_i$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$, czyli:

$$\forall t \in [0, +\infty) \forall i = 1,2,\ldots,n \quad \dot{K}_i(t) = s_i Y(t) - \delta_i K_i(t) \tag{1}$$

gdzie s_i to stopa inwestycji w i-ty zasób kapitału, zaś δ_i jest stopą deprecjacji tego zasobu, dla $i = 1, 2, \ldots, n$. O stopach s_i oraz δ_i zakłada się, że $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, s_i, $\delta_i \in (0,1)$ oraz $\sum_{i=1}^{N} s_i \in (0,1)$.

2 Dowód stabilności n-kapitałowego modelu dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa przedstawiony jest w opracowaniu Dykasa, Sulimy, Tokarskiego [2008].

Założenie 3. Praca efektywna E jest iloczynem zasobu wiedzy A, którego przyrost ma charakter egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda[3], i liczby pracujących L. Jednostki efektywnej pracy E rosną według stopy $\mu > 0$, która jest sumą stopy postępu technicznego $g > 0$ oraz stopy wzrostu liczby pracujących $\eta > 0$. Dlatego też:

$$\forall t \in [0, +\infty)\ \dot{E}(t)/E(t) = \mu = g + \eta$$

oraz

$$\forall t \in [0, +\infty)\ \dot{A}(t)/A(t) = g$$

$$\dot{L}(t)/L(t) = \eta$$

Niech $y(t) = \frac{Y(t)}{E(t)}$ dla $t \in [0, \infty)$ oraz $k_i(t) = \frac{K_i(t)}{E(t)}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, $t \in [0, \infty)$ będą odpowiednio produktem na jednostkę efektywnej pracy oraz i-tym zasobem kapitału na jednostkę efektywnej pracy. Wtedy funkcję produkcji CES możemy zapisać w postaci:

$$\forall t \in [0, +\infty)\ y(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i^{-\omega}(t) + \alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}}. \tag{2}$$

Ponadto $\dot{k}_i(t) = \frac{\dot{K}_i(t)E(t) - K_i(t)\dot{E}(t)}{E^2(t)}$ dla $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ i po podstawieniu równania (1) i (2) otrzymujemy:

$$\forall t \in [0, +\infty)\forall i = 1,2,\ldots,n\ \dot{k}_i(t) = s_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j^{-\omega}(t) + \alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}} - (\delta_i + \mu)k_i(t) \tag{3}$$

Układ złożony z n równań różniczkowych (3) generuje lokalny układ dynamiczny i opisuje ruch i dynamikę wytwarzanego produktu Y w omawianym modelu.

Punkt stacjonarny w modelu Nonnemana-Vanhoudta z *n*-kapitałową funkcją produkcji CES

Punkt stacjonarny w układzie dynamicznym to taki, który nie porusza się względem czasu (jego prędkość jest równa 0), czyli taki, który spełnia równanie:

[3] Postęp techniczny w sensie Harroda to taki, który bezpośrednio potęguje produktywność nakładów pracy L.

$$\forall t \in [0, +\infty)\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\ \dot{k}_i(t) = 0.$$

Z tego wynika, że punkt stacjonarny układu dynamicznego generowanego przez układ (3) jest rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\forall t \in [0, +\infty) \forall i = 1,2,\ldots,n\ s_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j^{-\omega}(t) + \alpha_0 \right)^{-\frac{1}{\omega}} - (\delta_i + \mu) k_i(t) = 0$$

lub po przekształceniach:

$$\forall t \in [0, +\infty) \forall i = 1,2,\ldots,n\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j^{-\omega}(t) + \alpha_0 = \left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu} \right)^{\omega} k_i^{-\omega}(t)$$

Podstawiając $\left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu} \right)^{\omega} = \gamma_i$ oraz $k_i^{-\omega}(t) = L_i(t)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ sprowadzamy układ (3) do układu równań liniowych:

$$\forall t \in [0, +\infty) \forall i = 1,2,\ldots,n\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_j(t) - \gamma_i L_i(t) = -\alpha_0$$

lub w postaci macierzowej:

$$\forall t \in [0, +\infty) \begin{bmatrix} \alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 - \gamma_2 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n - \gamma_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ \vdots \\ L_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_0 \\ -\alpha_0 \\ \vdots \\ -\alpha_0 \end{bmatrix}$$

Układ ten można rozwiązać wykorzystując twierdzenie Cramera i rozwinięcie Laplace'a. Kolejne wyznaczniki Cramera dane są wzorami:

$$W = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 - \gamma_2 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n - \gamma_n \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (-\gamma_i) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (-\gamma_i) \right)$$

oraz

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n\ W_i = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 & \ldots & -\alpha_0 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 - \gamma_2 & \ldots & -\alpha_0 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & -\alpha_0 & \ldots & \alpha_n - \gamma_n \end{bmatrix} = -\alpha_0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (-\gamma_j)$$

Jeśli parametry α_i, γ_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ spełniają równość $\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} = 1$ to układ równań (3) nie ma rozwiązań, a tym samym rozważany układ dynamiczny nie ma punktów stacjonarnych, bo:

$$W = 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n}(-\gamma_i) + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n}(-\gamma_i) \right) = 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n}(-\gamma_i)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{(-\gamma_j)}\right) =$$
$$= 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} = 1,$$

ponieważ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ $\gamma_i \neq 0$. Jeśli zaś α_i, γ_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ spełniają: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \neq 1$, to układ równań (3) ma jedno rozwiązanie, a tym samym układ dynamiczny generowany przez to równanie ma jeden punkt stacjonarny $\left(L_1^*, L_2^*, \ldots, L_n^*\right)$ o współrzędnych:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \; L_i^* = \frac{-\alpha_0 \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(-\gamma_j)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(-\gamma_k) + \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j \left(\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n}(-\gamma_k) \right)} = \frac{\frac{\alpha_0}{\gamma_i}}{1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\gamma_j}}$$

lub wracając do zmiennych z podstawienia:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \; k_i^* = \left(\frac{\frac{\alpha_0}{\gamma_i}}{1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\gamma_j}} \right)^{-\frac{1}{\omega}} \tag{4}$$

Z równania (4) płynie wniosek, że: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} < 1$, bo $k_i \geq 0$. Nierówność ta wyznacza przestrzeń fazową analizowanego układu równań różniczkowych.

Stabilność punktu stacjonarnego w modelu Nonnemana-Vanhoudta z *n*-kapitałową funkcją produkcji CES

Do udowodnienia stabilności punktu stacjonarnego $\left(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*\right)$ wykorzystam następujące kryterium stabilności wynikające z twierdzenia Grobmana-Hartmana:

Twierdzenie 1.[4]

Niech dany będzie układ dynamiczny generowany przez równanie $x' = f(x)$, $f \in C^1(R)$ i $x_0 \in R$ będzie punktem stacjonarnym tego układu dynamicznego. Wtedy:

1. jeżeli część rzeczywista każdej z wartości własnych macierzy Jacobiego funkcji f w punkcie x_0 będzie ujemna ($\mathrm{Re}\,\sigma(f'(x_0)) < 0$), to punkt x_0 jest asymptotycznie stabilny.
2. Jeżeli istnieje wartość własna macierzy Jacobiego funkcji f w punkcie x_0 taka, że jej część rzeczywista jest dodatnia, to punkt x_0 jest punktem niestabilnym.

Macierz Jacobiego rozważanego układu dynamicznego wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} s_1\alpha_1\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j k_j^{-\omega}+\alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}-1}k_1^{-\omega-1}-(\delta_1+\mu) & \cdots & s_n\alpha_n\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j k_j^{-\omega}+\alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}-1}k_n^{-\omega-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1\alpha_1\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j k_j^{-\omega}+\alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}-1}k_1^{-\omega-1} & \cdots & s_n\alpha_n\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j k_j^{-\omega}+\alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}-1}k_n^{-\omega-1}+(\delta_n+\mu) \end{bmatrix}$$

a w punkcie stacjonarnym $\left(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*\right)$ sprowadza się do postaci:

$$\begin{bmatrix} \beta_1-\upsilon_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_2-\upsilon_2 & \cdots & \beta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_2-\upsilon_2 \end{bmatrix}$$

gdzie $\beta_i = s_i\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j k_j^{*-\omega}+\alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}-1}k_i^{*-\omega-1}$ oraz $\upsilon_i = \delta_i + \mu$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wielomian charakterystyczny funkcji (3) ma postać:

$$w(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(-\upsilon_i-\lambda)+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(-\upsilon_i-\lambda)\right)$$

$$w(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(-\delta_i-\mu-\lambda)+\sum_{j=1}^{n}s_j\alpha_j\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k k_k^{*-\omega}+\alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}-1}k_j^{*-\omega-1}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(-\delta_i-\mu-\lambda)\right) \tag{5}$$

[4] Patrz Tw. 6.2.1 w Ombach J. [1999] *Wykłady z równań różniczkowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Wartości własne analizowanego odwzorowania są rozwiązaniami równania:

$$\prod_{i=1}^{n}(-\upsilon_i-\lambda)+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(-\upsilon_i-\lambda)\right)=0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n}(-\upsilon_i-\lambda)\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{(-\upsilon_j-\lambda)}\right)=0$$

Z tego wynika, że $\lambda = -\upsilon_i$, ale $\upsilon_i = \delta_i + \mu > 0$, więc Re $\lambda < 0$. Pozostaje zbadanie pierwiastków następującego równania:

$$1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{(-\upsilon_j-\lambda)}=0 \tag{6}$$

a zatem:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{s_j\alpha_j\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k k_k^{*-\omega}+\alpha_0\right)^{-\frac{1}{\omega}-1}k_j^{*-\omega-1}}{\delta_i+\mu+\lambda}=1$$

Ponieważ λ może być liczbą zespoloną, więc możemy ją zapisać jako $\lambda = a + bi$, gdzie $i=\sqrt{-1}$, zaś $a, b \in \Re$. Wtedy równanie (6) można zapisać jako:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\upsilon_j+a+bi}=1$$

lub korzystając z własności liczb zespolonych jako:

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j\frac{\upsilon_j+a}{(\upsilon_j+a)^2+b^2}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\frac{bi}{(\upsilon_j+a)^2+b^2}=1$$

Z tego wynika, że $\sum_{j=1}^{n}\beta_j\frac{b}{(\upsilon_j+a)^2+b^2}=0$, a to oznacza, że $b = 0$, czyli wartości własne są liczbami rzeczywistymi. Mamy więc równanie:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\upsilon_j+a}=1 \tag{7}$$

Aby udowodnić, że liczby $a \in \Re$ spełniające równanie (7) są liczbami ujemnymi przeprowadzę dowód nie wprost. Przypuśćmy więc, że $a \geq 0$, wtedy równanie (7) spełnia nierówność:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\upsilon_j + a} = \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j \alpha_j \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m k_m^{*-\omega} + \alpha_0 \right)^{-\frac{1}{\omega}-1} k_j^{*-\omega-1}}{\delta_j + \mu + a} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j \alpha_j \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m \frac{\frac{\alpha_0}{\gamma_m}}{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\gamma_k}} + \alpha_0 \right)^{-\frac{1}{\omega}-1} \left(\frac{\frac{\alpha_0}{\gamma_j}}{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\gamma_k}} \right)^{1+\frac{1}{\omega}}}{\delta_j + \mu + a} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j \alpha_j \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\frac{\alpha_m}{\gamma_m}}{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\gamma_k}} + 1 \right)^{-\frac{1}{\omega}-1} \left(\frac{\frac{1}{\gamma_j}}{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\gamma_k}} \right)^{1+\frac{1}{\omega}}}{\delta_j + \mu + a} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{s_j \alpha_j}{\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\gamma_k}\right)^{-\frac{1}{\omega}-1}} \left(\frac{\frac{1}{\gamma_j}}{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\gamma_k}} \right)^{1+\frac{1}{\omega}}}{\delta_j + \mu + a} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{s_j \alpha_j}{(\gamma_j)^{1+\frac{1}{\omega}}}}{\delta_j + \mu + a} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j \alpha_j}{(\delta_j + \mu)\left(\frac{s_j}{\delta_j + \mu} \right)^{\omega+1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\left(\frac{s_j}{\delta_j + \mu} \right)^{\omega}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} < 1$$

co prowadzi do sprzeczności, a to kończy dowód, że $a < 0$. Na podstawie twierdzenia 1. udowodniliśmy, że punkt stacjonarny dany wzorem (4) jest asymptotycznie stabilny. Stabilność punktów stacjonarnych oznacza, że gdy układ zostanie zaburzony w otoczeniu punktu stabilnego to ma on naturalne tendencje do dążenia do tego punktu długookresowej równowagi przy $t \to \infty$. Ze wzoru (4) wynika, że równowaga modelu Nonnemana-Vanhoudta z n-kapitałową funkcją produkcji CES jest zależna od udziału poszczególnych nakładów kapitału oraz efektywnej pracy α_i dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, stopy inwestycji w i-ty zasób kapitału s_i (dla $i = 1, 2, \ldots, n$), stopy deprecjacji tego zasobu δ_i (dla $i = 1, 2, \ldots, n$), stopy wzrostu jednostek efektywnej pracy μ oraz parametru ω.

Praca i produkcja w stanie równowagi w modelu Nonnemana-Vanhoudta z *n*-kapitałową funkcją produkcji CES

Niech $\forall t \in [0,+\infty)\ y_L(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$ i $k_{i_L}(t) = \frac{K_i(t)}{L(t)}$ (dla $i = 1, 2, \ldots, n$) oznaczają odpowiednio wydajność pracy i techniczne uzbrojenie pracy. Z powyższych równań i założenia 3 modelu wynika, że:

$$\forall t \in [0,+\infty)\ y_L(t) = A(t)y(t) \tag{8}$$

oraz

$$\forall t \in [0,+\infty) \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad k_{i_L}(t) = A(t)k_i(t) \tag{9}$$

Z równań (8) i (9) wynika, że stopa wzrostu wydajności pracy $g_{y_L} = \frac{\dot{y}_L}{y_L}$ oraz stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy $g_{k_{iL}} = \frac{\dot{k}_{iL}}{k_{iL}}$ (dla $t = 1, 2, \ldots, n$) dane są wzorami:

$$\forall t \in [0,+\infty) \quad g_{y_L}(t) = g + \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \tag{10}$$

i

$$\forall t \in [0,+\infty) \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad g_{k_{iL}}(t) = g + \frac{\dot{k}_i(t)}{k_i(t)} \tag{11}$$

Równania (10) i (11) interpretuje się w ten sposób, że stopa wzrostu wydajności pracy g_{y_L} (stopy wzrostu kolejnych nakładów kapitału na pracującego $g_{k_{iL}}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$) jest (są) sumą stopy postępu technicznego g oraz stopy wzrostu produktu na jednostkę efektywnej pracy $\frac{\dot{y}}{y}$ (stóp wzrostu kolejnych zasobów kapitału na jednostkę efektywnej pracy $\frac{\dot{k}_i}{k_i}$).

W punkcie stabilnym rozważanego układu dynamicznego stopa wzrostu wydajności pracy g_{y_L} dana wzorem (10) oraz stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy $g_{k_{iL}}$ opisane za pomocą wzoru (11), są równe stopie postępu technicznego g, ponieważ ze stacjonarności tego punktu wynika, że $\dot{k}_i = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, a ponadto $\forall t \in [0,+\infty)\ \dot{y}(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial k_i}\dot{k}_i(t)$.

W punkcie równowagi rozważanego modelu produkt na jednostkę efektywnej pracy wynosi:

$$y^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i^{*-\omega}(t) + \alpha_0 \right)^{-\frac{1}{\omega}} = \left(\frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu} \right)^{\omega}}} \right)^{-\frac{1}{\omega}}. \tag{12}$$

Z równania (12) płyną następujące wnioski natury ekonomicznej:

- w długookresowej równowadze modelu Nonnemana-Vanhoudta z n-kapitałową funkcją produkcji CES produkt na jednostkę efektywnej pracy zależy od: udziału poszczególnych nakładów kapitału oraz efektywnej pracy α_i dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, stopy inwestycji w i-ty zasób kapitału s_i (dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$), stopy deprecjacji tego zasobu δ_i (dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$) oraz od stopy wzrostu jednostek efektywnej pracy μ,
- różniczkując równanie (12) względem α_0 okazuje się, że:

$$\frac{\partial y^*}{\partial \alpha_0} = -\omega^{-1} \alpha_0^{-1-\frac{1}{\omega}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu} \right)^{\omega}} \right)^{\frac{1}{\omega}} < 0,$$

zatem wysokim nakładom efektywnej pracy α_0 odpowiada niska wartość produktu na jednostkę efektywnej pracy y^* w równowadze rozważanego modelu,

- skoro:

$$\frac{\partial y^*}{\partial \alpha_i} = -\omega^{-1} \left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu} \right)^{-\omega} \alpha_0^{-\frac{1}{\omega}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu} \right)^{\omega}} \right)^{\frac{1}{\omega}-1} < 0$$

to im wyższe są udziały poszczególnych nakładów kapitału α_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ tym niższy jest produkt na jednostkę efektywnej pracy y^* wytworzony w gospodarce znajdującej się w stanie równowagi,

- ponieważ:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \frac{\partial y^*}{\partial s_i} = \alpha_i (\delta_i + \mu)^{\omega} s_i^{-\omega-1} \alpha_0^{-\frac{1}{\omega}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu} \right)^{\omega}} \right)^{\frac{1}{\omega}-1} > 0,$$

zatem coraz wyższym stopom inwestycji w i-ty zasób kapitału s_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ odpowiada coraz wyższy produkt na jednostkę efektywnej pracy y^* w rozważanym modelu w stanie równowagi,

- ponadto mamy:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \frac{\partial y^*}{\partial \delta_i} = -\alpha_i (\delta_i + \mu)^{\omega - 1} s_i^{-\omega} \alpha_0^{-\frac{1}{\omega}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu}\right)^{\omega}}\right)^{\frac{1}{\omega} - 1} < 0,$$

  co świadczy o tym, że im wyższe są stopy deprecjacji i-tego zasobu δ_i (dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$) tym mniejszy jest produkt na jednostkę efektywnej pracy y^* w równowadze modelu Nonnemana-Vanhoudta z n-kapitałową funkcją produkcji CES,
- dodatkowo:

$$\frac{\partial y^*}{\partial \mu} = -\alpha_i \alpha_0^{-\frac{1}{\omega}} s_i^{-\omega} (\delta_i + \mu)^{\omega - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\left(\frac{s_i}{\delta_i + \mu}\right)^{\omega}}\right)^{\frac{1}{\omega} - 1} < 0,$$

  co oznacza, że im wyższa jest stopa wzrostu jednostek efektywnej pracy μ, tym mniejszy jest produkt na jednostkę efektywnej pracy y^* w równowadze rozważanego modelu.

Podsumowanie

Z prowadzonych w pracy rozważań płyną następujące wnioski:

– w prezentowanym w pracy modelu wzrostu gospodarczego przyjmuje się założenia, że (po pierwsze) proces produkcyjny opisany jest przez n-kapitałową funkcję produkcji CES, w której do wytworzenia produktu niezbędne jest n różnych nakładów kapitałowych oraz nakłady jednostek efektywnej pracy, (po drugie) przyrost każdego z zasobów kapitału jest różnicą pomiędzy inwestycjami w ten zasób, a jego deprecjacją oraz (po trzecie) jednostki efektywnej pracy rosną według egzogenicznej stopy wzrostu będącej sumą stopy postępu technicznego i stopy wzrostu liczby pracujących,

– rozważany model wzrostu gospodarczego, opisany za pomocą n równań różniczkowych zwyczajnych, które generują lokalny układ dynamiczny, posiada punkt stacjonarny, którego współrzędne zależne są od: udziału poszczególnych nakładów kapitału oraz efektywnej pracy, stopy inwestycji w kolejne zasoby kapitału, stopy deprecjacji tych zasobów oraz od stopy wzrostu jednostek efektywnej pracy,

– punkt stacjonarny charakteryzuje się stabilnością, co implikuje, że jeśli gospodarka zmieni nieznacznie strukturę zasobów, stopy inwestycji, stopy deprecjacji kapitału, to będzie ona dążyć do tego punktu stacjonarnego. Dlatego też wyznaczony punkt stacjonarny traktować można jako punkt długookresowej równowagi w rozważanym modelu wzrostu gospodarczego.

- w warunkach długookresowej równowagi wszystkie stopy wzrostu wydajności pracy oraz stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy rosną według stopy postępu technicznego g,
- w długookresowej równowadze omawianego modelu produkt na jednostkę efektywnej pracy zależy od: udziału poszczególnych nakładów kapitału oraz efektywnej pracy, stopy inwestycji oraz stopy deprecjacji zasobów kapitału i od stopy wzrostu jednostek efektywnej pracy,
- im wyższy jest udział poszczególnych nakładów kapitału oraz efektywnej pracy, im wyższe są stopy deprecjacji zasobów kapitału i stopa wzrostu jednostek efektywnej pracy, tym mniejszy jest produkt wytwarzany na jednostkę efektywnej pracy y^* w równowadze rozważanego modelu, natomiast im wyższa jest stopa inwestycji w zasoby kapitału, tym ten produkt jest większy.

Bibliografia

Chiang A.C., [1994], *Podstawy ekonomii matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Cobb C.W., Douglas P.H., [1928], *A Theory of Production*, „American Economic Review", No. 18.

Czerwiński Z., [1973], *Podstawy matematycznych modeli wzrostu gospodarczego*, PWE, Warszawa.

Domar E.D., [1962], *Szkice z teorii wzrostu gospodarczego*, PWN, Warszawa.

Dykas P., Edigarian A., Tokarski T., [2011], *Uogólnienie N-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego Nonnemana-Vanhoudta*, [w:] Wzrost gospodarczy. Teoria. Rzeczywistość, red. Emil Panek, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.

Dykas P., Sulima A., Tokarski T., [2008], *Złote reguły akumulacji kapitału w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa" nr 11-12.

Hall R.E., Taylor J.B., [1995], *Makroekonomia. Teoria, funkcjonowanie i polityka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Jones C.I., [2002], *Introduction to the Economic Growth*, W.W. Norton & Company, New York, London.

Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N., [1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics".

Nonneman W., Vanhoudt P., [1996], A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries, „Quarterly Journal of Economics".

Ombach J., [1999], *Wykłady z równań różniczkowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Palczewski A., [1999], *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Pelczar A., [1980], *Wstęp do teorii układów dynamicznych*, Wydawnictwo Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków.

Romer D., [1996], *Advanced Macroeconomics*, McGraw Hill Inc., New York etc.

Solow R.M., [1956], *A contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics".

Solow R.M., [1967], *Teoria kapitału i stopa przychodu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Tokarski T., [2005], *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Tokarski T., [2008], *Efekty skali a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Tokarski T., [2008], *Równowaga neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego przy funkcji produkcji CES*, „Studia Prawniczo-Ekonomiczne", tom LXXVII.

Tokarski T., [2009], *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Welfe W. (red.), [2001], *Ekonometryczny model wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Woźniak M.G., [2004], *Wzrost gospodarczy. Podstawy teoretyczne*, Wydawnictwo AE w Krakowie, Kraków.

THE STABILITY OF THE NONNEMAN-VANHOUDT MODEL WITH THE CES PRODUCTION FUNCTION

Summary

The paper aims to show that the Nonneman-Vanhoudt growth model with the *n*-capital CES macroeconomic production function is asymptotically stable in a certain environment. The Nonneman-Vanhoudt model of economic growth is conducted with an assumption that the CES production function is described by a system of ordinary differential equations. To investigate the stability of the model, a criterion resulting from the Hartman-Grobman theorem was used. The stability of this model means that if the structure of resources, the investment rate, and the rate of capital depreciation change slightly, the economy will tend toward a stationary point that can be regarded as a long-term equilibrium in the considered model of economic growth. The author examines the properties of the growth model and focuses on factors including the growth of labor productivity, equipment and output per unit of effective labor.

Keywords: stability of model, *n*-capital growth model, production function